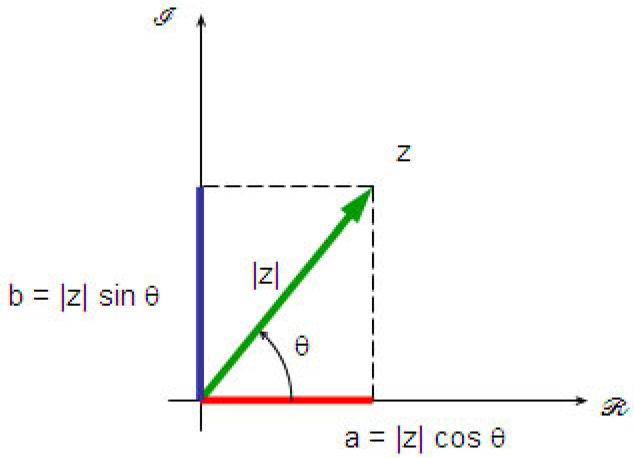
**NUMEROS COMPLEXOS NA FORMA TRIGONOMÉTRICA**

Na representação trigonométrica, um número complexo z = a + bi é determinado pelo módulo do vetor que o representa e pelo ângulo que faz com o semi-eixo positivo das abscissas.




Vetor é uma entidade matemática que define grandezas que se caracterizam por módulo, direção e sentido, como por exemplo, velocidade e força.

Um vetor é representado por um segmento de reta orientado. O módulo é expresso pelo comprimento do segmento, a direção é dada pelo ângulo entre a reta suporte e a horizontal, o sentido é dado pela seta.

Quando z = a+bi:

1) **Argumento de z** é o ãngulo **θ , θ = arg(z)** ;

2) **Módulo de z** é o comprimento **r** = **|z| =** $\sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$ .

O **argumento geral** de z, é θ+ 2kπ ou θ+ k360° ; o **argumento principal** é o valor de θ no intervalo $-\pi < \theta \le \pi$ ou $-180° < \theta \le 180°$

A partir das relações trigonométricas[1] obtêm-se:

cos θ = a/r isto é a = r cos θ

sen θ = b/r isto é b = r sen θ

Portanto:

Para o complexo z = a + bi

z = (r cos θ) + (r sen θ) i

A representação trigonométrica[2] de um complexo z é

z = r (cos θ+ i sen θ), com o argumento principal

θ = arg(z) e r = |z| = $\sqrt{a^2 + b^2}$

Ou é z = r (cos (θ + k. 360°)+ i sen (θ + k.360°)) com o argumento geral

θ+ k360°

Esta última expressão é importante para o cálculo das raízes de z.

Da relação tg θ = b/a consegue-se o valor de θ.

---

[1] Se você quiser relembrar as relações trigonométrica, assista:
http://www.youtube.com/watch?v=FZLXujO3yw8
http://www.youtube.com/watch?v=YRt4Ni73954&NR=1

[2] Se você quiser saber mais sobre a representação trigonométrica de um complexo, veja:**http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonom/trigo03.htm**

**APLICATIVO 1**

Este aplicativo é em português e permite a visualização de diferentes exemplos para a transformação de complexos da forma algébrica para a trigonométrica e vice versa. É essencial para o entendimento.
http://www.drec.min-edu.pt/Eviprof/resources/school7/files/trab2/complejos4.htm

Exemplos:

1. Se z é um número real, o ponto P pertence à reta das abscissas (horizontal) e $|z| = 1$
Istoé: $\theta = 0 + k360°$ e $|z| = 1$

$z = 1$ na forma trigonométrica é $z = \cos k360° + i \operatorname{sen} k360°$, com k inteiro.

Isto quer dizer que existem muitas representações trigonométricas para z, correspondentes a giros dados em torno da origem.

Neste caso, $z = 1$ pode ser representado por:

$z = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$

$z = \cos 360° + i \operatorname{sen} 360°$

$z = \cos 720° + i \operatorname{sen} 720°$

$z = \cos 1080° + i \operatorname{sen} 1080°$

etc.

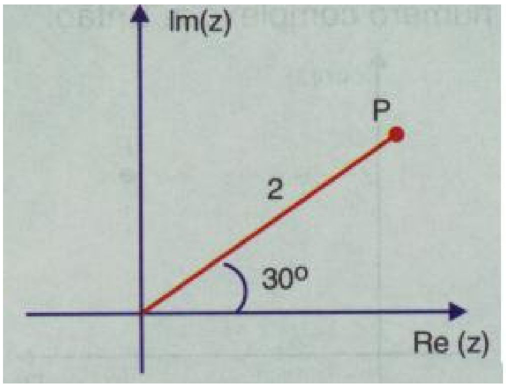
2. Se z é um número imaginário, o ponto P pertence à reta das ordenadas (vertical) e |z| = 1

Isto é: $\theta = 90° + k360°$ e $|z| = 1$

z = i na forma trigonométrica é $z = (\cos(90°+k360°) + i \operatorname{sen}(90°+k360°))$

com k inteiro.

3.



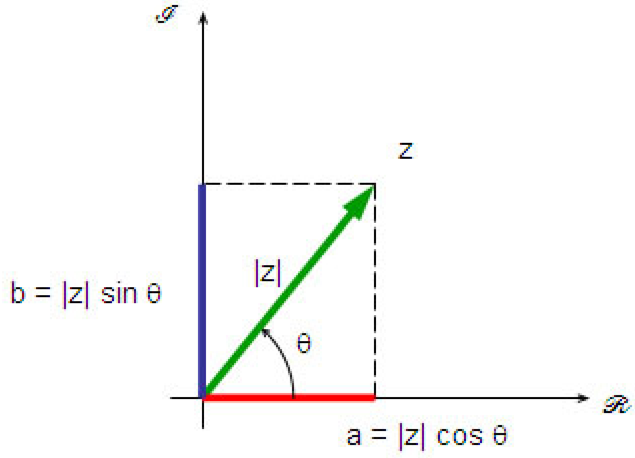

Na figura, OP representa um vetor e pode ser identificado com um número complexo z.

**θ** = arg(z) = 30 °   $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$

$z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2(\sqrt{3}/2 + i/2) = \sqrt{3} + i$

4. O complexo z = 1 + i é representado na figura abaixo com:

a=1 e b=1 logo tg $\theta$ = b/a = 1




Então $\theta$= 45°

Este valor corresponde à menor determinação de $\theta$: 180°< $\theta \leq$ 180°

De uma forma geral $\theta$ = 45° + k360° , onde k é qualquer número inteiro (positivo, negativo ou nulo) ou seja, o mesmo ângulo é obtido a partir de um número inteiro de voltas em torno da origem O. Cada volta corresponde a 360°.

O módulo r = |z| = $\sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b^2}}$ = $\sqrt{2}$

z = 1+i = r (cos $\theta$+ i sen $\theta$) = $\sqrt{2}$ ( cos 45º+ i sen 45°)

Esta forma corresponde à menor determinação para $\theta$

**Igualdade de Números Complexos**

Dados dois complexos z = a + i b e w = c + i d tem-se:

Na forma trigonométrica com argumento geral, sendo

z = **r** (cos (**$\theta$ + k.360°**)+ i sen (**$\theta$ + k.360°**))

w = **r**' (cós ($\alpha$ + **k.360°**)+ + isen ($\alpha$ **+ k.360°**))

$$z = w \Leftrightarrow \ r\cos\theta = r'\cos\alpha \ \text{ e } \ r\text{sen}\theta = r'\text{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow r = r' \quad \text{e} \quad \alpha = \theta + k.360°$$

Observe que a igualdade exige que r = r' mas <u>não exige</u> que $\theta = \alpha$, mas, sim, que os vetores coincidam, na mesma direção, módulo e sentido.

**Simétrico de um Número Complexo**

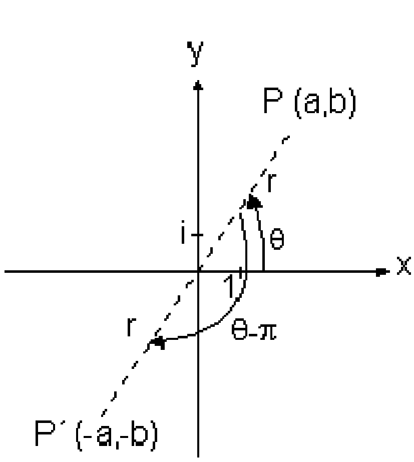
O **simétrico** do número complexo z = a + ib é o número -z = - (a + ib), ou seja

**-z = (-a) + i(-b)**.

Corresponde a uma rotação de 180º do afixo de z em torno da origem.

Em notação trigonométrica:

$$z = \mathbf{r}\,(\cos \boldsymbol{\theta} + i \text{ sen } \boldsymbol{\theta}) \quad \text{e} \quad (-z) = \mathbf{r}\,(\cos(\boldsymbol{\theta} - 180º) + i \text{ sen } (\boldsymbol{\theta} - 180°))$$




Re(-z) = -Re z

Im(-z) = -Imz

|-z| = |z|

arg(-z) =

arg (z - 180°)

180° =π

Exemplo:

z = 1+i = r (cos $\theta$+ i sen $\theta$) = $\sqrt{2}$ ( cos 45º+ i sen 45°)

(- z) = -1- i = r (cos ( $\theta$ - 180°) + i sen ( $\theta$ - 180°) =

$\sqrt{2}$ (cos (-135°)+ i sen (-135°))

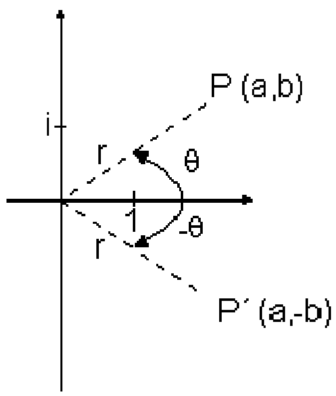
**Conjugado de um Número Complexo**

O **conjugado** do complexo z = a + ib é o número complexo denotado por **z = a - ib**.

Na forma trigonométrica, o conjugado de z = z = **r** (cos **$\theta$**+ i sen **$\theta$**)

$\overline{z}$ **=** z = **r** (cos (-**$\theta$**)+ i sen (-**$\theta$**))

Corresponde a uma reflexão do afixo de z na reta das abcissas.




Re z = Re $\overline{z}$

Im z = -Im $\overline{z}$

|z| = |$\overline{z}$|

arg z = -arg $\overline{z}$

Exemplo

z = 1+i = $\rho$ (cos $\theta$+ i sen $\theta$) = $\sqrt{2}$ ( cos 45º+ i sen 45°)

$\overline{z}$ = 1 - i = $\sqrt{2}$ (cos (-45°)+ i sen ( -45°))

**Inverso de um Número Complexo**

Já vimos que,

sendo $z = a + bi$ ($\neq 0$), o seu **inverso** é **$z^{-1} = (a - bi) / (a^2 + b^2)$** $= \bar{z} / |z|^2$

onde $|z|^2 = a^2 + b^2$ pois $|z| =$ **$r =$** $\sqrt{a^2 + b^2}$

Observe que:

1) o argumento de **$z^{-1}$ é o mesmo argumento de $\bar{z}$ : $( - \theta )$**
2) o módulo é o inverso do módulo de z, pois

como $|\bar{z}| = |z|$ então $|z^{-1}| = |\bar{z}| / |z|^2 = |z| / |z|^2 = 1/ |z|$

$$z = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$z^{-1} = (1/r) ( \cos (-\theta) + i \operatorname{sen} ( -\theta))$$

**Exemplo**

$z = 1+i = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = \sqrt{2} ( \cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

$z^{-1} = (a - bi) / (a^2 + b^2) = (2/ \sqrt{2}) (\cos (-45^\circ) + i \operatorname{sen} ( -45^\circ) )$

**APLICATIVO 2**

É importante que você visualize as representações de números complexos e de seus inversos .

O seguinte aplicativo é essencial para isto:
http://www.ies.co.jp/math/java/comp/cgyak_a/cgyak_a.html

**Produto de complexos**

Seja $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ e $w = r'(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

Vejamos a interpretação geométrica do produto de dois complexos,

**Caso 1: O produto de um complexo z por um número real K**

$$K.z = Kr(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$\theta$ não se altera e r se altera com a multiplicação por K.

Se K > 1, então esta operação corresponde a uma ampliação vetor z .

Se 0 < K < 1, esta operação corresponde a uma contração do vetor z.

Se K < 0, esta operação corresponde a uma ampliação ou contração, seguida de uma rotação de 180º, pois z passará para a semi-reta oposta, que contém (-z).

Exemplo:

$z = 1+i = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \sqrt{2}\,(\cos 45^{o} + i \operatorname{sen} 45^{\circ})$

$3z = 3 + 3i = 3\,r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 3\sqrt{2}\,(\cos 45^{o} + i \operatorname{sen} 45^{\circ})$

$-3z = -(3+3i) = 3r(\cos(\theta - 180°) + i \operatorname{sen}(\theta - 180°) =$

$3\sqrt{2}(\cos(-135°) + i \operatorname{sen}(-135°))$

**Caso 2: O produto de um complexo z = a + bi por um imaginário puro.**

$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

$w = r'(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

$z.w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)\, r'(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) =$

$r\, r' [(\cos \theta . \cos 90° - \operatorname{sen} \theta . \operatorname{sen} 90°) + i(\operatorname{sen} \theta . \cos 90° + \cos \theta . \operatorname{sen} 90°)$

É preciso, neste momento, relembrar a expressão trigonométrica para seno e cosseno da soma de arcos (ou ângulos)[3]:

$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta . \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta . \operatorname{sen} \varphi$

$\operatorname{sen}(\theta + \varphi) = \cos \theta . \operatorname{sen} \varphi + \cos \varphi . \operatorname{sen} \theta$

Logo:

$\cos \theta . \cos 90° - \operatorname{sen} \theta . \operatorname{sen} 90° = \cos(\theta + 90°)$

$\operatorname{sen} \theta . \cos 90° + \cos \theta . \operatorname{sen} 90° = \operatorname{sen}(\theta + 90°)$

Voltando:

$$z.w = r\, r' (\cos(\theta + 90°) + i \operatorname{sen}(\theta + 90°))$$

O produto do complexo z por um imaginário puro

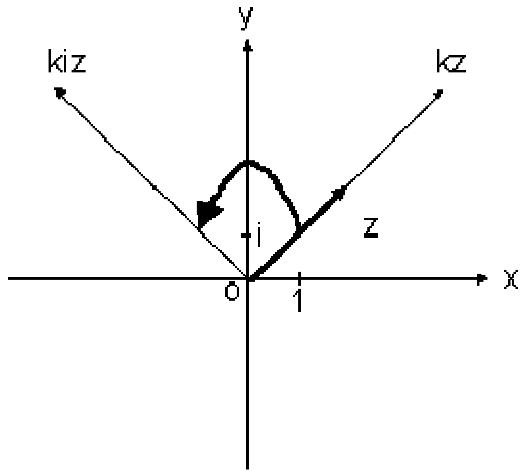
[3] Se você quiser verificar as justificativas destas expressões, veja em:http://criar.no.sapo.pt/sen_cos.html

corresponde a uma ampliação ou contração do vetor,

seguido de uma rotação de 90º no sentido anti-horário

em torno da origem do vetor obtido.

Estas operações podem ser facilmente visualizadas na figura seguinte:




**Caso 3: O produto de um complexo genérico z por outro complexo w**

$z = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$w = r'\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

$z.w = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\; r'\,(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) =$

$r\,r'\,[(\cos\theta.\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta.\,\mathrm{sen}\,\varphi) + i\,(\mathrm{sen}\,\theta.\cos\varphi + \cos\theta.\,\mathrm{sen}\,\varphi) =$

$r\,r'\,(\cos(\theta + \varphi) + i.\mathrm{sen}(\theta + \varphi))$

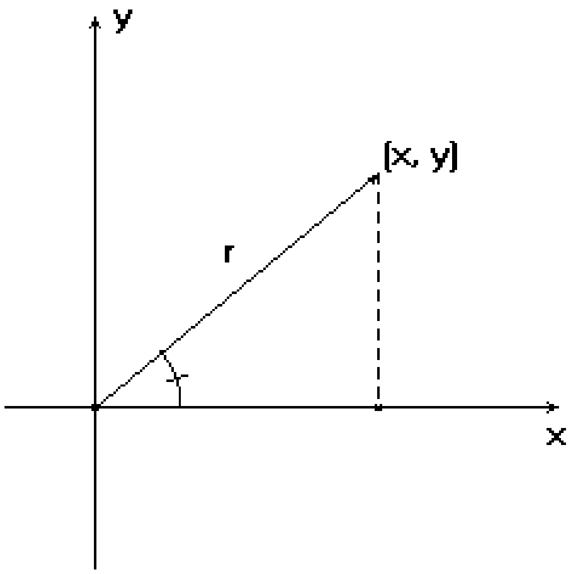
$$z.w = r\,r'\,(\cos(\theta + \varphi) + i.\mathrm{sen}(\theta + \varphi))$$

O produto do complexo z por outro complexo w corresponde a uma ampliação ou contração do vetor,

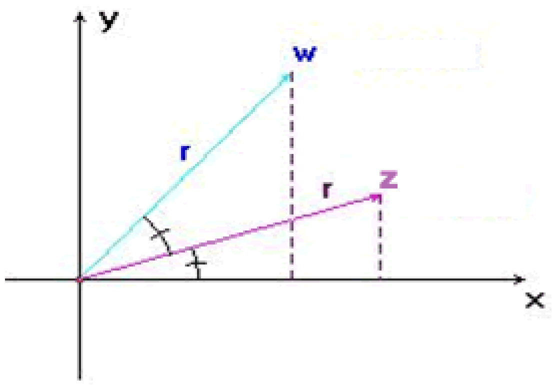
seguido de uma rotação de ângulo igual ao argumento de w ( φ )

no sentido anti-horário em torno da origem do vetor obtido.

Observe, na figura: o vetor  tem módulo r e argumento θ:




Ao ser multiplicado por outro vetor com ângulo φ, ele gira, sofre uma rotação de ângulo φ:



**Potenciação com expoente inteiro**

Vamos nos restringir à potências com expoente inteiro, embora, nos complexos seja possível definir potência com base e expoente complexo.

Chamamos potenciação a uma potência de expoente inteiro.

Tem-se: $\mathbf{z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}$ **(n vezes), n natural.**

$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

Como o produto de dois complexos corresponde à soma dos argumentos, temos:

$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta))$

$z^3 = r^3(\cos(3\theta) + i \operatorname{sen}(3\theta))$

Demonstra-se, por indução que

$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$

Esta é a chamada Fórmula de Moivre.

A demonstração da Fórmula de Moivre pode ser vista no **Vídeo: potências de complexos**

**APLICATIVO 3**

**http://www.drec.min-**

edu.pt/Eviprof/resources/school7/files/trab2/complejos5.htm

Este aplicativo é em português e permite a visualização de diferentes exemplos para a transformação de complexos da forma algébrica para a trigonométrica e vice versa.

$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = r \operatorname{cis}(\theta)$

A expressão com seno e cosseno é abreviada para outra mais simples:

$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = \operatorname{cis}(\theta)$

**APLICATIVO 4**

http://www.drec.min-edu.pt/Eviprof/resources/school7/files/trab2/complejos6.htm

Este aplicativo é em português e permite a visualização de diferentes exemplos de potências e raízes de complexos na forma trigonométrica.

**Radiciação**

Definição:

Dado z, complexo, chamamos raiz n-ésima de z,

a todo w complexo tal que $w^n = z$.

Ex:

1. 2, -2, 2i, -2i são as raízes quartas do número complexo 16. $\sqrt[4]{16}$ = w
   $W_1 = 2$; $w_2 = -2$; $w_3 = 2i$; $w_4 = -2i$
2. i, -i são as raízes quadradas do número complexo –1 : $\sqrt[2]{-1}$ = i, -i

A pergunta então é:

quantas são as raízes enésimas de um número complexo

e como podemos determiná-las ?

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra,

a equação complexa $\mathbf{w^n = z}$

com z e w complexos, tem n raízes.

Isto significa que a raiz n-ésima de um complexo, tem n raízes.

Sendo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ as raízes índice n de z são dadas pela **fórmula de de Moivre**.

Na **Apresentação: Fórmula de Moivre para Radiciação**, você encontra a demonstração.

z tem n raízes diferentes,

obtidas pela fórmula de Moivre para a radiciação:

$$W_k = \sqrt[n]{\rho}\ \left[\cos\frac{\theta + k.360°}{n} + i\ \text{sen}\frac{\theta + k.360°}{n}\right] \text{ com k inteiro}$$

**Neste curso vamos investigar apenas as raízes da unidade, isto é as, soluções da equação complexa**

$$\mathbf{z^n = 1}$$

Veja o exemplo **da equação $z^5 = 1$** na **Apresentação: Raízes da Unidade**.

**APLICATIVO 5**

É essencial que você manipule este aplicativo. Com ele, toda esta "complicação" algébrica vai ficar clara:

**http://www.drec.min-edu.pt/Eviprof/resources/school7/files/trab2/complejos7.htm**

Este aplicativo é em português e permite a visualização das n-ésimas raízes de um complexo. Nosso objetivo é apenas calcular e visualizar as raízes de UM, verificando que elas completam os vértices de um polígono regular de n lados.

## Instruções de uso

Focalize o segundo aplicativo.

Aumente o zoom para 50 de modo que o complexo 1 fique bem visível.

Estabeleça os dados para 1: r = 1 e A = 0 ( A neste aplicativo representa o argumento θ.)

Faça variar n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Observe as raízes de 1 e os polígonos que ali se formam.

**APLICATIVO 6**

Neste aplicativo, você pode visualizar a potenciação e a fórmula de Moivre.

Pode dar valores positivos e negativos para n, vendo as potências

$z^n$ e $z^{-n}$.

http://www.ies.co.jp/math/java/comp/cgyak_d/cgyak_d.html

INSTRUÇÕES DE USO

How to use this applet

- **Drag red point.**----------Ponha o cursor no ponto vermelho

Você pode mover com o ponto vermelho, variando os valores de r e de t .

A letra t representa o argumento de z e r o módulo de z

- **Check "Show additional line"**.--- Peça para mostrar linhas adicionais, para ver polígonos. Pressione Additional Line

- **Check "Expression of function"** --- Pressione o botão "Expression of function"

Para escolher a expressão trigonométrica desejada escolha a expressão trigonométrica usual: $z = r\ (\cos\ \theta + i\ \text{sen}\ \theta)$

Ou a expressão ( $r\ \text{cis}\theta$).

A primeira é mais comum.

Veja o que está dito em Expression of Function

- **Press "Increase n" button**. ---------Pressione no botão Increase n, para aumentar n

- **Press "Decrease n" button**.----- Pressione no botão Decrease n, para diminuir n

## Sugestão

Observe o que o corre quando você fixa z com módulo maior do que 1 e deixa correr n, crescendo e depois decrescendo.

Faça o mesmo para o módulo menor do que 1.

Este texto foi baseado em:

**Números Complexos, uma abordagem científica** extraído do sitehttp://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euler/numeroscomplexos.htm#Representação%20Trigonométrica

CARMO, Manfredo; MORGADO, Augusto; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria e Números Complexos**. Publicação SBM, 2001, 122 p.