

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA**



**O NÚMERO DE OURO COMO INSTRUMENTO DE APRENDIZAGEM  
SIGNIFICATIVA NO ESTUDO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS.**

**Prof. Dra. Vera Clotilde Garcia, Acad. Fabiana Fattore Serres, Acad. Juliana Zys Magro  
e Acad. Taís Bruno de Azevedo.**

## SUMÁRIO

<b>1. Introdução</b>	<b>03</b>
<b>2. Origem dos Números Irracionais</b>	<b>04</b>
2.1. A contagem elementar da vida individual e social	04
2.2. O Problema da medida – Construção do Campo Racional	05
2.3. E assim nasceu a geometria	07
2.4. Subdivisão da Unidade	07
2.5. O novo campo numérico	09
<b>3. A matemática por trás do Número de Ouro</b>	<b>14</b>
3.1. A divisão áurea de um segmento ou a divisão em média e extrema razão	14
3.2. Propriedades do número áureo	16
3.3. Retângulo áureo	17
3.4. Incomensurabilidade dos lados de um retângulo áureo	24
3.5. O pentágono áureo	25
3.6. A Seqüência de Fibonacci	32
<b>4. Plano de atividades para o vídeo do número de ouro</b>	<b>36</b>
<b>5. Bibliografia Recomendada</b>	
<b>6. Anexo 1 – Material para a atividade da ficha 2</b>	<b>39</b>
<b>7. Anexo 2 – O número de ouro na internet</b>	<b>46</b>
<b>8. Anexo 3 - O número de Ouro na Natureza</b>	<b>53</b>

## 1. Introdução:

O número de ouro é um número irracional muito particular. Os gregos atribuíam-lhe propriedades mágicas e usavam-no na construção de seus edifícios, como o Parthenon.

Na arte, este número aparece inúmeras vezes ligado a uma concepção estética, como observamos na Mona Lisa de Leonardo da Vinci. Também é encontrado nas formas da natureza, como o Nautilus, uma concha marinha e em fenômenos da biologia como o famoso problema dos coelhos de Fibonacci.

Este trabalho tem como eixo o conceito do número de ouro. A partir daí desenvolve uma proposta de ensino que inclui outros tópicos fundamentais na matemática escolar: noções de medida, razão e estimativa, números irracionais e operações com radicais.

O plano se organiza em três partes: vídeo motivador, fundamentação matemática para o professor, seqüências de atividades didáticas, para a sala de aula.

O vídeo tem origem na série Arte e Matemática, uma co-produção da TV Escola da Secretaria de Educação a Distância (Seed/MEC) e da TV Cultura da Fundação Padre Anchieta (SP), que conquistou o prêmio Dragão de Prata do II Festival Internacional do Filme Científico de Beijim (China).

A seqüência de atividades didáticas está na forma adequada para ser utilizada na sala de aula.

O objetivo maior desta proposta é criar oportunidades para uma aprendizagem significativa, levando para a sala de aula uma seqüência didática diferenciada e atraente.

## 2. Origem dos Números Irracionais

### 2.1. A contagem elementar da vida individual e social

A cada momento a vida exige que efetuemos contagens, a dona de casa quando controla o orçamento doméstico, o cobrador do ônibus quando dá o troco ao passageiro, a mãe ao determinar o tempo do termômetro para medir a febre do filho, enfim a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias a realização de contagens.

Mesmo que o homem vivesse isolado, ainda assim teria necessidade de contar, a sucessão dos dias, a quantidade de alimento necessário para manter-se, e tantas outras situações que o dia-a-dia lhe impõe.

Quanto mais desenvolvidas as relações dos homens uns com os outros, mais necessária, importante e urgente se torna a contagem. Como pode haver uma transação comercial sem que um não saiba contar o que compra e o outro o dinheiro que recebe?

Ao longo da história, sempre que aos homens se põe um problema do qual depende sua vida, individual ou social, eles acabam por resolvê-lo, melhor ou pior.

Pergunta-se, portanto: - Como resolveram os homens a necessidade da contagem?

A resposta a essa pergunta é a seguinte: - Pela criação dos números naturais.

1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Por quantos séculos se arrastou a criação destes números? É impossível dizê-lo; mas pode afirmar-se com segurança que o homem primitivo de há 20.000 ou mais anos não tinha destes números o mesmo conhecimento que temos hoje.

Ultimamente, têm sido estudados com cuidado certos agrupamentos de povos existentes na África e na Austrália.

Esses povos, em estado muito atrasado de civilização, permitem-nos fazer uma idéia da maneira como os primitivos, que viveram há alguns milhares de anos, se achavam em relação a esta questão. Os resultados gerais deste estudo podem resumir-se da seguinte maneira:

- A idéia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência, os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a idéia de número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cômoda, mas falsa.

- Esta afirmação é comprovada pelo que se passa ainda hoje em alguns povos. Há tribos da África Central que não conhecem os números além de 5 ou 6, estão assim, próximas das crianças nos primeiros anos de vida, para elas tudo quanto passe além de três é “muitos”, há outras que vão até 10.000. O maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições da vida econômica desses povos; quanto mais intensa é a vida de relação, quanto mais freqüentes e ativas são as trocas comerciais dentro e fora da tribo, maior é o conhecimento dos números.

### O Problema da medida – Construção do Campo Racional

Todos sabem em que consiste o comparar duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc.

Quando comparamos os segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$

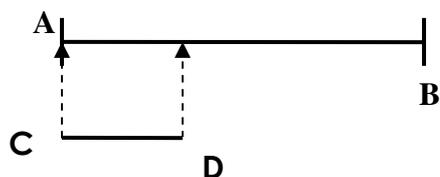


Fig. 1

Aplicamos um sobre o outro, fazendo coincidir dois extremos A e C, vimos que o ponto D cai entre A e B e o resultado da comparação exprimimos dizendo que o comprimento de  $\overline{AB}$  é maior que o de  $\overline{CD}$  ou que o comprimento de  $\overline{CD}$  é menor que o de  $\overline{AB}$ .

Verificamos que um comprimento é “maior que”, muitas vezes não é suficiente. Às vezes necessitamos saber quantas vezes cabe um comprimento no outro.

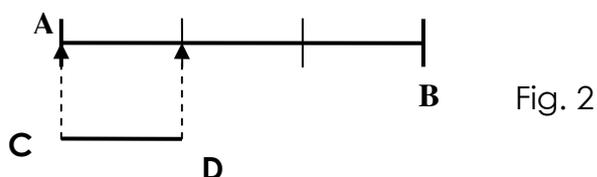
Precisamos de um termo de comparação para todas as grandezas de uma mesma espécie, as operações de troca que a vida social de hoje nos exige, seriam extremamente complicadas.

É necessário:

- Estabelecer um termo único de comparação para todas as grandezas da mesma espécie, a este termo chamamos unidade de medida de grandeza, por exemplo, centímetros para comprimentos, gramas para peso, etc.

- Responder à pergunta: - Quantas vezes? , o que se faz achando um número que exprima o resultado da comparação com a unidade. Chamamos este número de: "A medida da grandeza em relação a essa unidade".

Na figura abaixo, observamos o resultado da comparação:



Vemos que a unidade  $\overline{CD}$  cabe 3 vezes em  $\overline{AB}$  ou ainda podemos dizer que a medida de  $\overline{AB}$  tomando  $\overline{CD}$  como unidade é 3.

Então, no problema da medida, há três aspectos importantes que devemos considerar:

- Escolha da unidade
- Comparação com a unidade
- Expressão do resultado dessa comparação por um número.

O primeiro e o terceiro aspecto do problema estão relacionados e um condiciona o outro.

Escolhemos a unidade, sempre observando a consideração de caráter prático, de comodidade, de economia.

Seria complicado se escolhêssemos como unidade de comprimento para cortar um tecido o quilômetro, ou se determinássemos o milímetro para medir a distância entre duas cidades. Devemos sempre procurar uma unidade cômoda, para que ao enunciarmos a expressão numérica da medição, tenhamos uma idéia clara do resultado.

Ou seja, em princípio, podemos escolher qualquer unidade, mas na prática, o número que vamos encontrar como resultado, condiciona a escolha da unidade.

### 2.3. E assim nasceu a geometria

Heródoto, o pai da história, historiador que viveu no século V a.C. em seu livro II (Euterpe) refere-se deste modo às origens da geometria:

“Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e retangular de terra, com a obrigação de pagar por ano certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a geometria e que depois ela passou aos gregos.”

### 2.4. Subdivisão da unidade

Algumas vezes é vantajoso subdividirmos a unidade de medida num certo número de partes iguais;

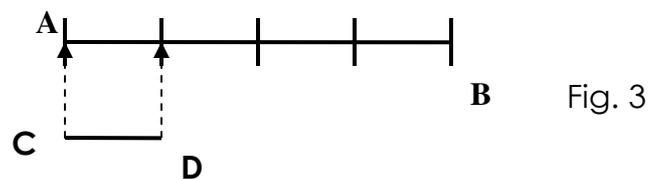


Fig. 3

Na figura acima o segmento  $\overline{AB}$  medido com a unidade  $\overline{CD} = u$  mede 4.

Se dividirmos a unidade  $\overline{CD}$  em 3 partes iguais e tomamos para nova unidade o segmento  $u' = \overline{CE}$ , teremos a medida de  $\overline{AB} = 12 u'$

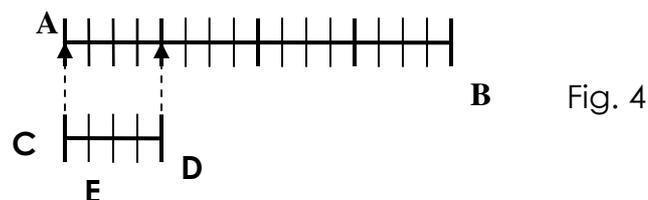
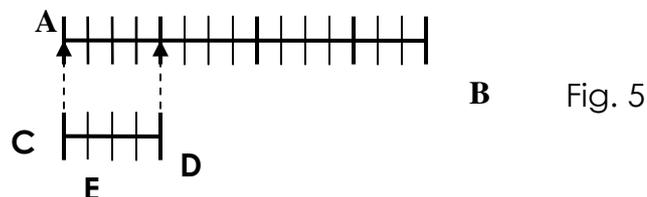


Fig. 4

Dizer que  $\overline{AB}$  vale quatro unidades de  $u$ , equivale a dizer que  $\overline{AB}$  vale 16 das quartas partes  $u' = \overline{CE}$  de  $u$ . Então o resultado da medição com a unidade tanto pode ser expresso pelo número 4 como pela razão dos dois números 16 e 4, isto é pelo quociente  $\frac{16}{4}$ .

Em geral, se uma grandeza, medida com a unidade  $u$  mede  $m$ , e subdividirmos  $u$  em  $n$  partes iguais, a medida da mesma grandeza, com a mesma unidade  $u$ , exprime-se pela razão dos dois números  $M$  e  $n$ , onde  $M = m \times n$  é o número de vezes que a nova unidade cabe na grandeza a medir:  $m = \frac{m \times n}{n}$ .

Freqüentemente, necessitamos medir uma grandeza com uma unidade de medida que não cabe um número exato de vezes, como na figura abaixo:



Como fazer para exprimir numericamente a medição de  $\overline{AB}$  ainda com a unidade de medida  $\overline{CD}$ ? Na figura 5 dividimos  $\overline{CD}$  em 4 partes iguais, de modo que esta nova unidade  $\overline{CE}$  caiba um número inteiro de vezes em  $\overline{AB}$ , notamos então que  $\overline{CE}$  cabe 15 vezes em  $\overline{AB}$ . Então:

- A medida de  $\overline{AB}$  em relação à nova unidade  $\overline{CE}$  é 15.
- A medida de  $\overline{AB}$  em relação a unidade  $\overline{CD}$  é dada pela razão dos dois números 15 e 4. Mas essa razão não existe nos números inteiros, já que 15 não é divisível por 4.

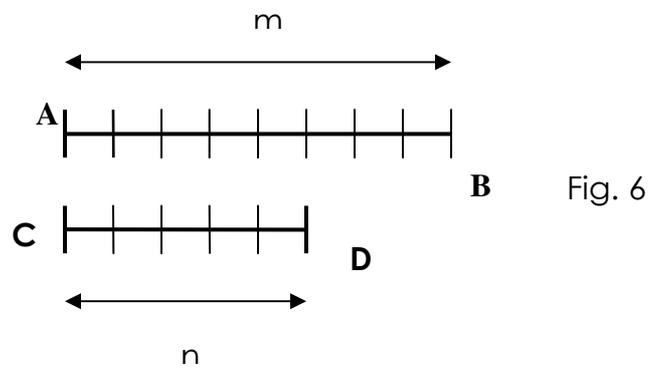
Chegamos então a um impasse, pois o conjunto dos números inteiros não é suficiente para realizarmos todas as medidas. Notamos a necessidade de aperfeiçoar nosso universo, mas como?

Uma vez que se trata de números e relações entre números, verificamos que a dificuldade está em que na figura 4 existe a razão  $16 : 4$  ou  $\frac{16}{4}$  e na

figura 5 não existe a razão  $15 : 4$  ou  $\frac{15}{4}$ . Em Geral sempre que feita a subdivisão da unidade em  $n$  partes iguais, uma dessas partes caiba  $m$  vezes na grandeza a medir, a dificuldade surge sempre que  $m$  não é divisível por  $n$ .

Se quisermos resolver a dificuldade devemos criar um novo campo numérico, de modo a reduzir essa impossibilidade.

## 2.5. O novo campo numérico



Na figura acima, sejam os dois segmentos de reta  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$ , em cada um dos quais se contém um número de vezes o segmento  $u$ .  $\overline{AB}$  contém  $m$  vezes e  $\overline{CD}$  contém  $n$  vezes o segmento  $u$ . Diz-se por definição, que a medida do segmento  $\overline{AB}$ , tomando  $\overline{CD}$  como unidade, é o número  $\frac{m}{n}$  e escreve-se

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \times \overline{CD},$$

quaisquer que sejam os números inteiros  $m$  e  $n$  ( $n$  não nulo); se  $m$  for divisível por  $n$ , o número  $\frac{m}{n}$  coincide com o número inteiro que é quociente da divisão; se  $m$  não for divisível por  $n$ , o número diz-se fracionário.

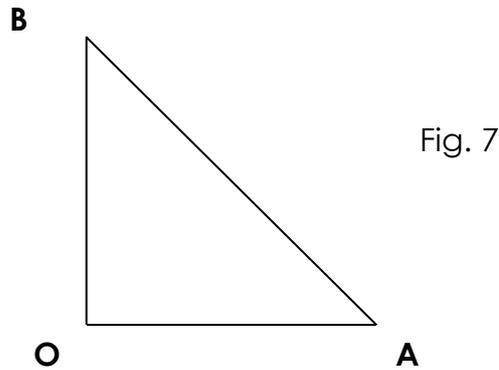
O número  $\frac{m}{n}$  se diz em qualquer hipótese, racional. Ao número  $m$  chamamos numerador e ao número  $n$  chamamos denominador.

A pergunta que fica agora é: - Sempre poderemos dividir  $\overline{CD}$  em certo número de partes, de tal forma que possamos expressar  $\overline{AB}$  usando como unidade uma dessas subdivisões de  $\overline{CD}$  ?

Do ponto de vista prático, a resposta imediata é sim, pois quando se aumenta o número de partes em que se divide  $\overline{CD}$ , o comprimento de cada uma delas diminui e chega uma altura em que a precisão limitada dos instrumentos de divisão e de medida não nos permite ir além de certo

comprimento mínimo e então a subdivisão de  $\overline{CD}$  será obviamente a que usaremos para expressar  $\overline{AB}$ .

Este resultado impõe-se a nossa intuição, mas será que vale sempre? Vamos analisar o seguinte caso de medições:

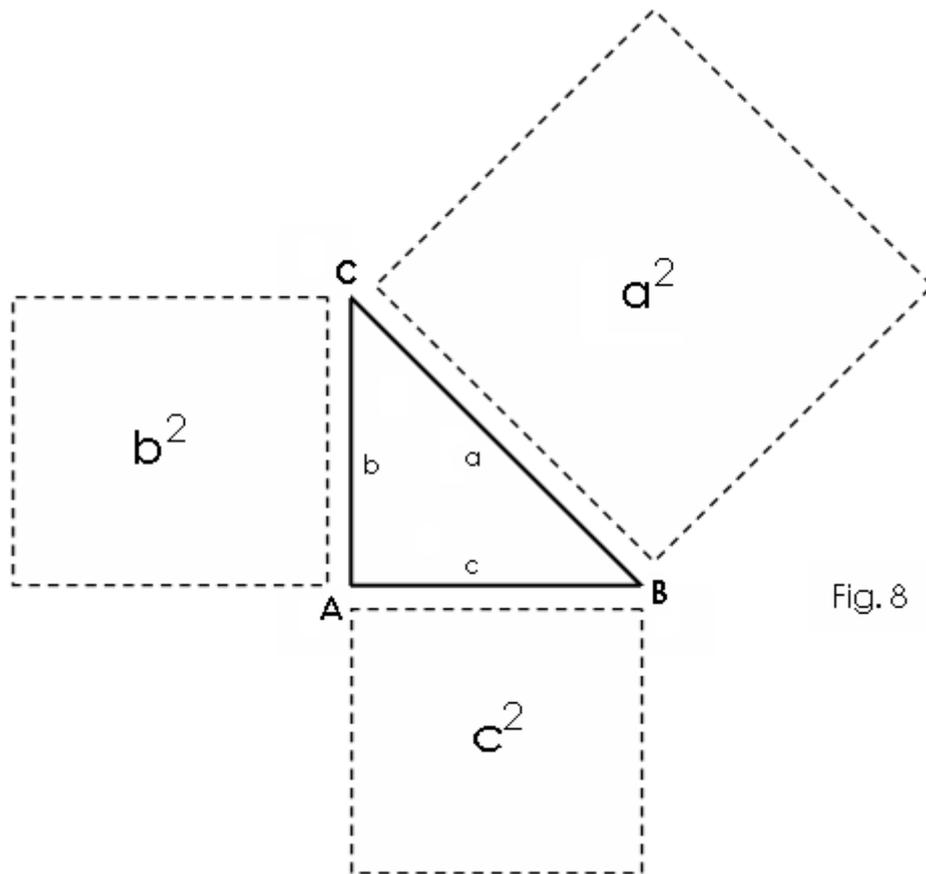


Seja o triângulo BAC isósceles, isto é,  $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ , e procuremos para este triângulo achar a medida da hipotenusa  $\overline{AB}$  tomando como unidade o cateto  $\overline{OA}$ .

Se como a intuição manda, essa medida existe, há um número racional  $r = \frac{m}{n}$  irredutível (se não fosse, podíamos torna-lo irredutível dividindo ambos os termos, m e n pelo maior divisor comum) tal que

$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \times \overline{OA}$$

No triângulo retângulo da figura abaixo, se verifica a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ .



A qual exprime geometricamente que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. Apliquemos esta propriedade ao nosso triângulo da figura 7:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

E como, por hipótese,

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB}$$

Temos que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2$$

Ou seja:

$$\overline{AB}^2 = 2 \times \overline{OA}^2$$

Se elevarmos ao quadrado os dois lados da igualdade da equação  $\overline{AB} = \frac{m}{n} \times \overline{OA}$  temos:

$$\overline{AB}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \times \overline{OA}^2$$

E como

$$\overline{AB}^2 = 2 \times \overline{OA}^2 = \frac{m^2}{n^2} \times \overline{OA}^2 = \overline{AB}^2$$

Então

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

E então

$$m^2 = 2 \times n^2$$

Vemos nesta última equação que  $m^2$  é um número par, mas se o quadrado de um número é par, este número tem de ser par. Notando que o quadrado de todo número ímpar é ímpar, e levando em conta que supomos que a fração  $\frac{m}{n}$  é irredutível, logo se  $m$  é par então  $n$  tem de ser ímpar.

Chamando  $k$  à metade de  $m$ , podemos escrever  $m = 2k$ , onde  $k$  é um número inteiro podemos escrever:

$$(2k)^2 = 2 \times n^2$$

E daí

$$4k^2 = 2n^2$$

Isto é

$$n^2 = 2k^2$$

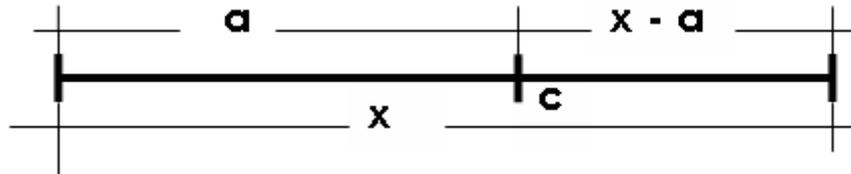
mas desta equação concluímos que  $n$  é par, portanto  $n$  deve ser simultaneamente par e ímpar o que é um absurdo.

Sempre que dois segmentos de reta estão nesta situação, dizemos que eles são incomensuráveis, o que quer dizer que não tem medida comum. Então sempre que não pudermos escrever uma medida na forma de um quociente, isto é quando o número que expressa a medida, não for um número do conjunto dos racionais, dizemos que esta medida é representada por um número irracional.

Conhecemos alguns números irracionais,  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \varphi$ , que são aqueles que aparecem em medidas geométricas, mas sabemos que não podemos pegar um a um estes números para completar este conjunto. Criamos o conjunto dos números irracionais, que é uma extensão dos números racionais para os números reais, completando a reta numérica.

### 3. A matemática por trás do número de ouro:

#### 3.1. A divisão áurea de um segmento ou a divisão em média e extrema Razão:



Dado o segmento AB, dizemos que um ponto **C** divide este segmento em média e extrema razão se o mais longo dos segmentos é média geométrica entre o menor e o segmento todo:

$$\frac{\text{segmento todo}}{\text{parte maior}} = \frac{\text{parte maior}}{\text{parte menor}}$$

Ou seja:

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

Multiplicando os dois lados da equação por  $a(x-a)$

obteremos:

$$\frac{a(x-a)x}{a} = \frac{a \cdot a(x-a)}{(x-a)}$$

$$(x-a)x = a^2$$

$$x^2 - ax = a^2$$

$$x^2 - ax - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação temos:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Vamos analisar a raiz positiva da equação por conveniência:

$$x = \frac{a(1 + \sqrt{5})}{2}$$

O número

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180399 \dots = \Phi \text{ (fi)}$$

é denominado número de ouro.

Ou seja:

$$\frac{x}{a} = 1,6180399 \dots$$

e também

$$\frac{a}{x} = 0,6180399 \dots$$

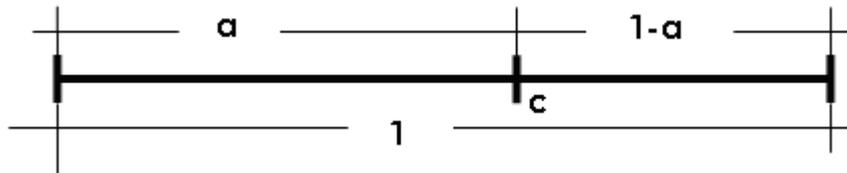
que é a razão inversa do número de ouro :

$$\frac{1}{\Phi}$$

Alguns autores dizem que  $\frac{1}{\Phi} = 0,6180399 \dots$  é o número de ouro, optamos por usar no nosso trabalho  $\Phi \text{ (fi)} = 1,6180399 \dots$ .

### 3.2. Propriedades do Número Áureo:

Basta considerar o segmento abaixo, no qual  $x=1$ ,



Como  $c$  divide o segmento em média e extrema razão, temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{a}-1}$$

$$\varphi = \frac{1}{a} \quad \text{logo} \quad \varphi = \frac{1}{\varphi-1}$$

E conseqüentemente:

$$\begin{aligned} \varphi^2 - \varphi &= 1 \\ \varphi^2 &= \varphi + 1 \end{aligned}$$

Dividindo por  $\varphi$  (f) :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

E conseqüentemente:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

### 3.3. O Retângulo Áureo

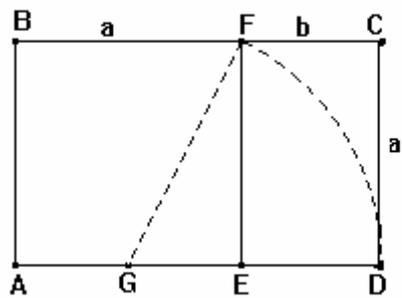


Fig. 1

Chama-se retângulo áureo, qualquer retângulo **ABCD** com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como **ABFE**, o retângulo restante **CDEF**, será semelhante ao retângulo original. Podemos traduzir esta semelhança pela relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Multiplicando os dois lados da equação 1 por  $b(a-b)$  temos :

$$\frac{(a+b).a.b}{a} = \frac{a.a.b}{b}$$

$$(a+b).b = a^2$$

$$a.b + b^2 = a^2$$

$$b^2 = a^2 - a.b$$

$$b^2 = a.(a-b)$$

$$b.b = a(a-b)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Pela relação  $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$

notamos que se pegarmos o retângulo menor da figura 1 :

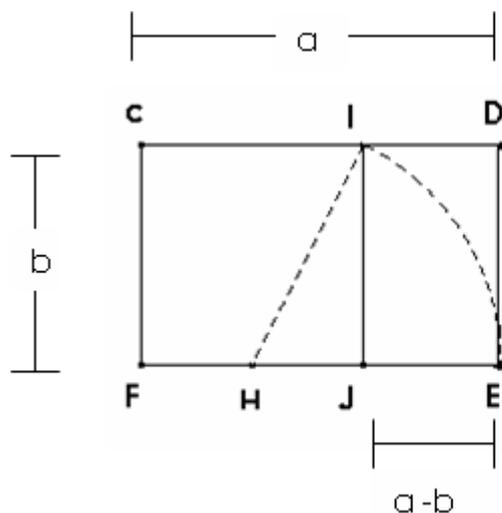


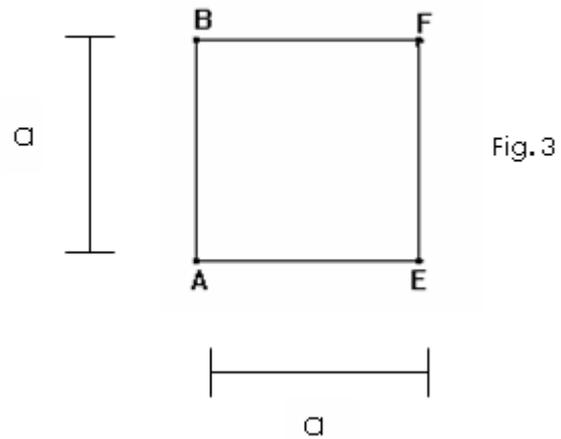
Fig. 2

e dele suprimirmos um quadrado, como **CIFJ**, será semelhante ao retângulo **CDEF**. Vemos então que a semelhança se mantém:

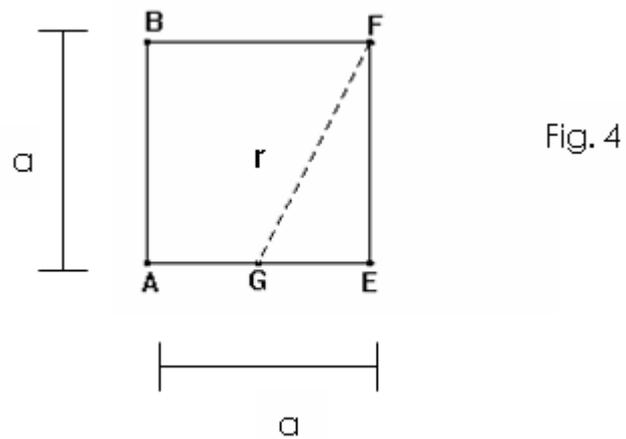
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$$

Como o retângulo original tem proporções áureas, podemos repetir esta operação de "suprimir quadrados" indefinidamente, que sempre encontraremos retângulos semelhantes, mantendo em cada novo retângulo a razão áurea.

Podemos construir um retângulo áureo partindo de um segmento  $AE = a$  e a partir deste, construir o quadrado  $ABEF$ , como abaixo:



Marcar o ponto médio do segmento  $AE$



Com a ponta seca do compasso em **G** e abertura = **GF** traçar o arco **FD**, que jaz na reta **AE** e **E** é interno ao segmento **AD**.

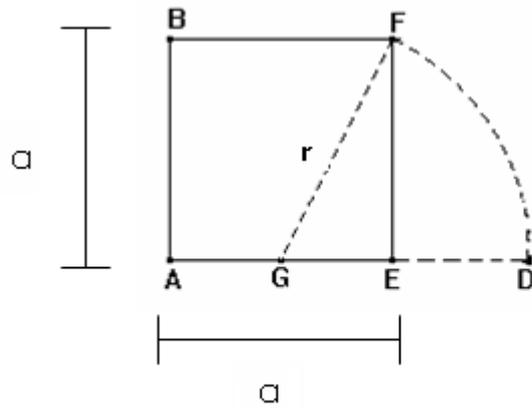


Fig. 5

Prolongar o segmento **BF** e traçar **CD** perpendicular ao segmento **AD**.

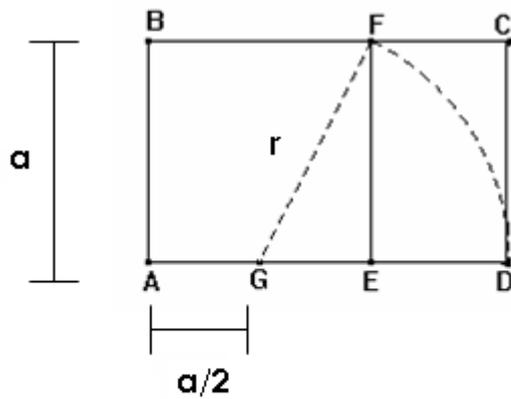
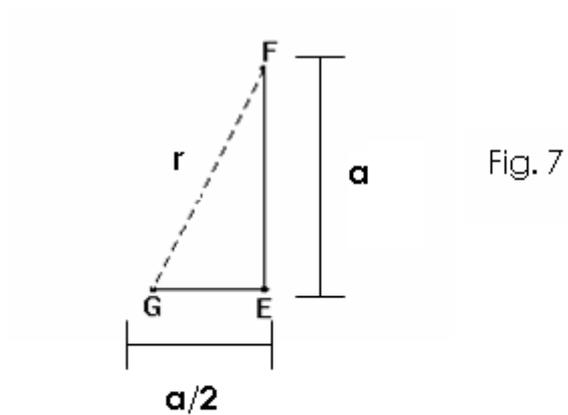


Fig. 6

Vemos na figura 6 que : **GF = GD = r**

E usando o fato de que o triângulo **GEF** é retângulo em **Ê** :



Aplicamos o teorema de Pitágoras e obtemos:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$r = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Logo construímos um retângulo de lados:

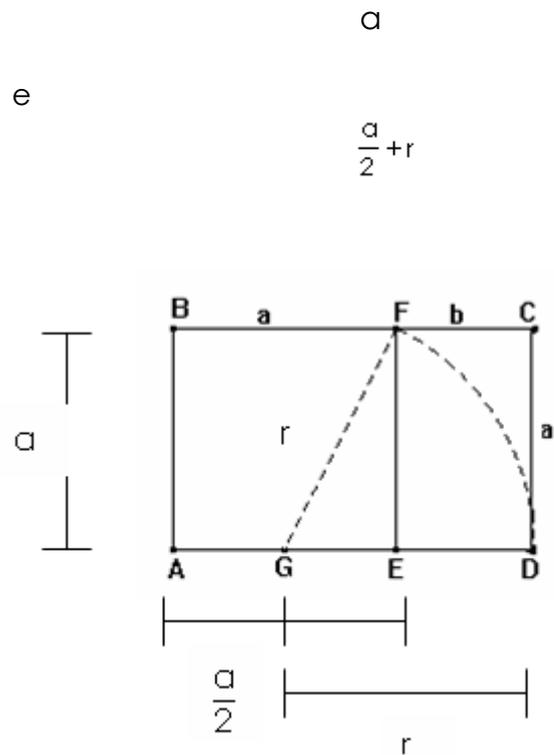


Fig.8

$$\frac{a}{2} + r = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$

Dividindo o lado maior do retângulo construído pelo menor temos:

$$\frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Obtemos,  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , o Número de Ouro como queríamos.

Partindo de um retângulo áureo **ABCD** podemos construir a espiral de ouro : Com centro em **E** e abertura = **EF** traçar o arco **BF**

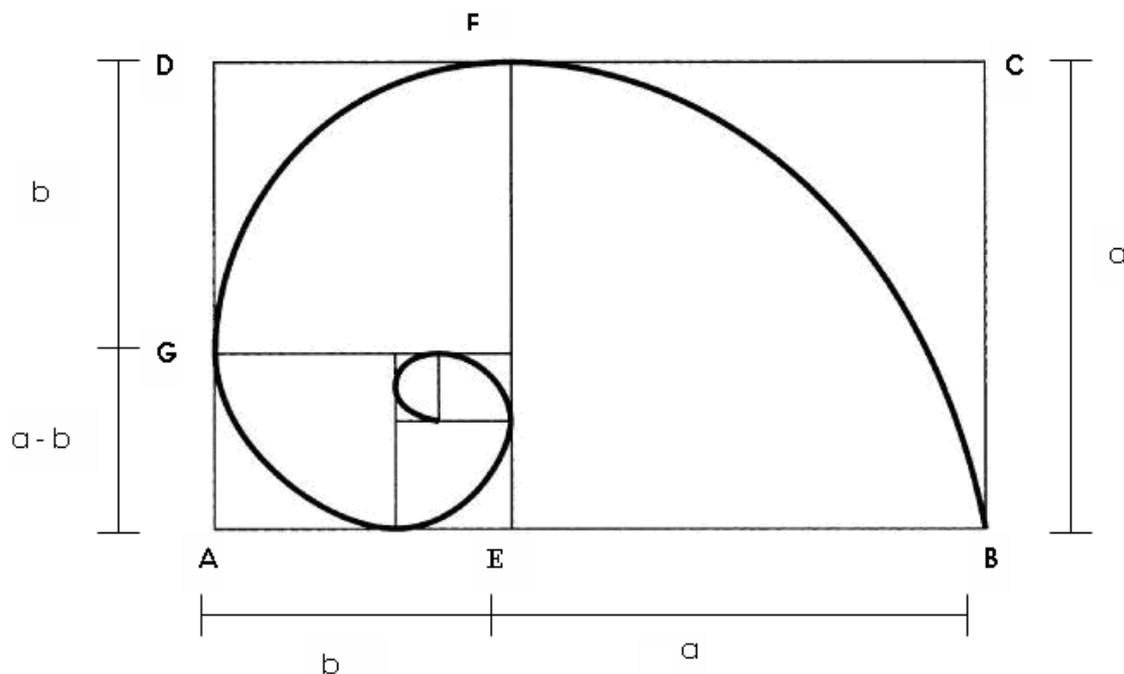


Fig.9

O retângulo **ADFE** também é áureo, então repetindo o processo, com a ponta seca em **D** e abertura = **DF** marcamos um ponto **G** em **AD**. Traçar o segmento **GH** de mesma medida e paralelo a **AE**. Agora com raio = **HF** e centro em **H**, traçamos o arco **GF**.

O retângulo **AEGH** mantém a razão áurea e se continuarmos suprimindo quadrados e repetindo o processo de traçar arcos como descrito acima, desenhamos a espiral áurea.

### 3.4. Incomensurabilidade dos lados de um retângulo áureo

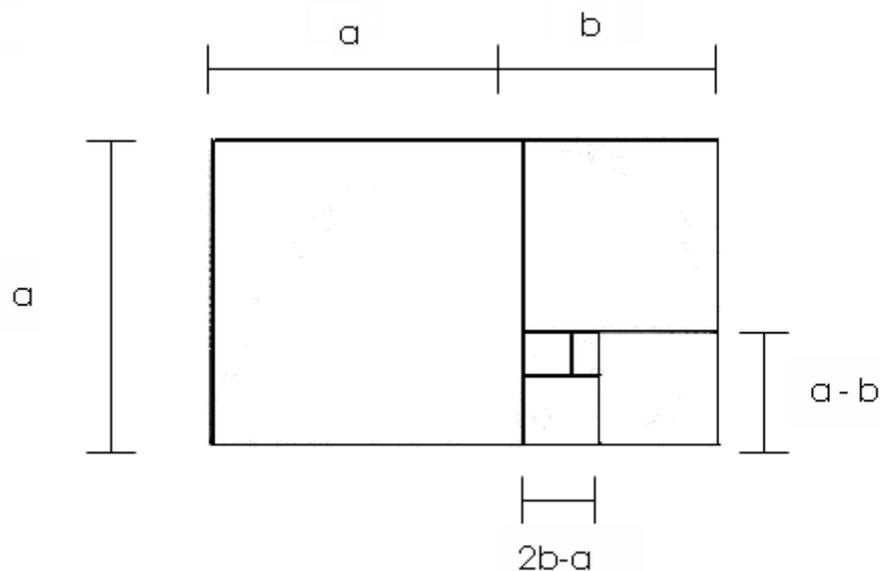


Fig. 10

Na figura acima temos vários retângulos áureos:  $a + b$  e  $a$ ,  $a$  e  $b$ ,  $b$  e  $a - b$ ,  $a - b$  e  $2b - a$ .

Seja a seqüência formada pelos lados maiores dos triângulos áureos da figura 10:

$$a + b, a, b, a - b, 2b - a, 2a - 3b, 5b - 3a, 5a - 8b, 13b - 8a, \dots$$

Vemos que qualquer dois elementos consecutivos desta seqüência são os lados de um retângulo áureo, então o processo feito anteriormente de "suprimir quadrados" de retângulos áureos conduz a uma seqüência infinita de retângulos áureos, com dimensões cada vez menores e tendendo a zero.

Queremos provar que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis, suponhamos então por absurdo que são comensuráveis, isto é, existe certa unidade de medida  $u$ , tal que

$$a + b = m \times u \quad m, n \text{ são inteiros positivos}$$

$$a = n \times u$$

Logo  $b = (m - n) \times u = q \times u$ ,  $q$  é inteiro positivo.

Como  $a$  e  $b$  são números inteiros positivos, utilizando a unidade  $u$ , todos os demais elementos da seqüência dos lados dos retângulos áureos, descrito acima, também são números inteiros positivos. Isto é um absurdo pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos. Concluímos então que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

### 3.5. O Pentágono áureo

A figura do pentagrama que aparece no vídeo da tv escola não oferece as regularidades desejadas, vamos optar por outra para desenvolvermos a matemática do Número de Ouro de maneira adequada.

Para construir um pentagrama de ouro, desenhemos uma circunferência de raio qualquer e com um transferidor dividimos o ângulo central em 5 ângulos de  $72^\circ$ .

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Ligando os pontos **ABCDE** obtemos um pentágono regular.

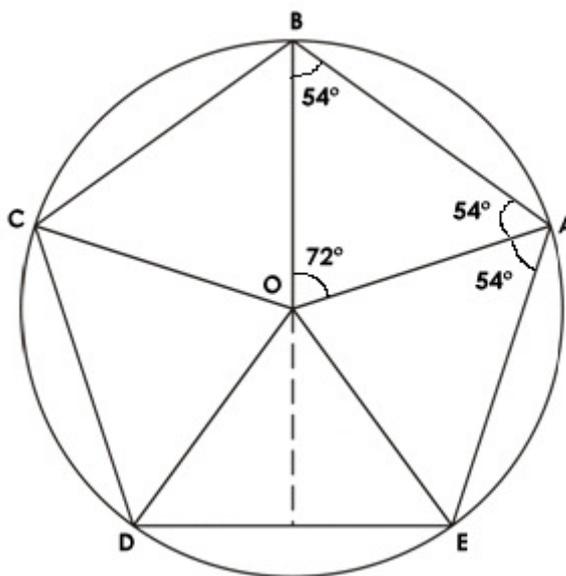


Fig. 11

Como  $m\angle BAO + m\angle AOB + m\angle OBA = 180^\circ$  e  $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$ , já que ambos os segmentos são raios da circunferência, temos que:

$$m\angle OBA \equiv m\angle OAB = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$$

Da mesma forma encontramos  $m\angle OBC = 54^\circ$  e portanto :

$$m\angle ABC = 108^\circ$$

Se traçarmos as diagonais  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CE}$  obteremos uma estrela:

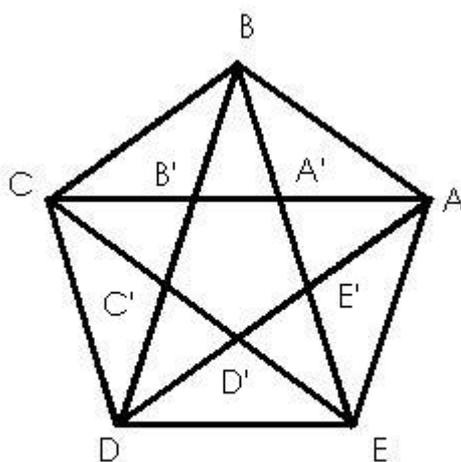


Fig. 12

Os pontos de intersecção  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$ ,  $E'$  de um pentágono regular determinam um segundo pentágono regular. Estudando a relação entre esses dois pentágonos, os matemáticos da escola pitagórica descobriram propriedades importantes.

Vamos mostrar que a razão entre a diagonal D e o lado L do pentágono é o Número de Ouro:

Para isto precisamos mostrar dois resultados:

1. Os triângulos ABE' e ACD são semelhantes
2. DE' = AB = L (lado do pentágono)

Do resultado 1, obtemos a seguinte relação de proporcionalidade:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AE'}$$

Observamos que:

$$AB = CD = L, \quad AC = D, \quad AE' = AD - DE' = D - L \quad (\text{pelo resultado 2}).$$

Ou seja,

$$\frac{D}{L} = \frac{L}{D - L}$$

Conseqüentemente :

$$L^2 = D^2 - DL$$

Podemos fazer

$$\frac{D}{L} = x$$

para obter

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

A raiz desta equação é o número  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180399 \dots = \Phi$  (fi)

Provamos assim que  $\frac{D}{L}$  é o Número de Ouro.

1. Vamos provar que os triângulos  $ABE'$  e  $ACD$  são semelhantes, provando que seus ângulos são iguais. Para isto vamos traçar uma seqüência de figuras:

FIGURA 1

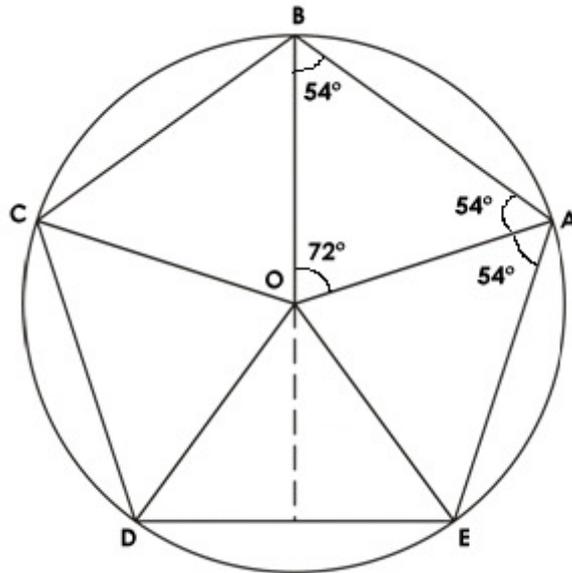
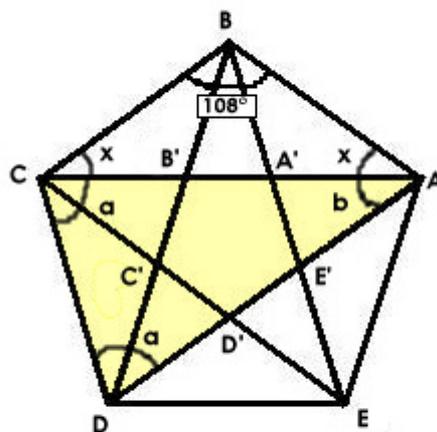


FIGURA 2



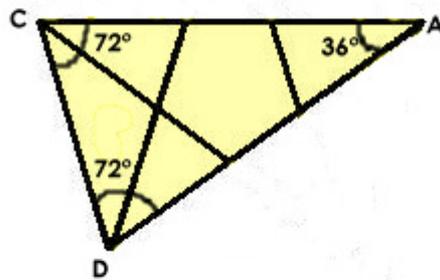
Vamos calcular os ângulos  $a$ ,  $b$ ,  $x$  marcados na figura:

$$2x = 180 - 108$$

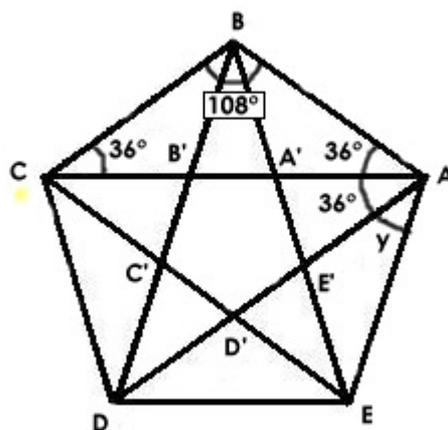
$$x = 36$$

$$a = 108 - 36 = 72$$

$$b = 180 - (2 \times 72) = 36$$



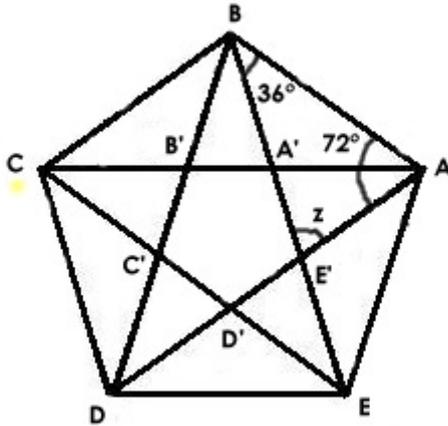
**FIGURA 3**



Vamos calcular o ângulo Y marcado na figura:

$Y = 108 - (2 \times 36) = 36$  Este é o ângulo entre qualquer um dos lados e a diagonal.

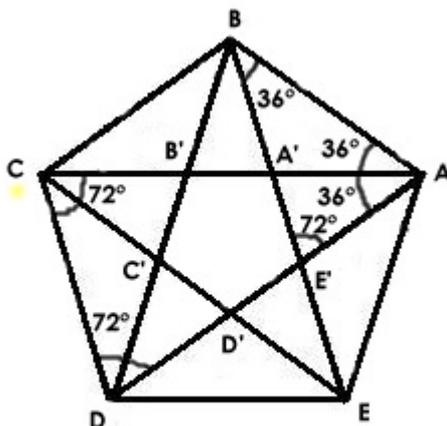
**FIGURA 4**



Vamos calcular o ângulo Z marcado na figura:

$$Z = 180 - 72 - 36 = 72$$

FIGURA 5



É fácil ver que os triângulos são semelhantes pois os três ângulos são congruentes.

Resta provar que  $DE' = AB = L$

Mas isto é simples, pois já vimos que o triângulo  $ABE'$  é isósceles e é fácil ver que o triângulo  $BDE'$  também é isósceles. Logo  $DE' = BE' = AB = L$ .

### 3.6. A Seqüência de Fibonacci

A seqüência de Fibonacci :

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , ....

tem como propriedade que um número é igual a soma de seus dois antecessores.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) matemático e comerciante da idade média escreveu em 1202 um livro denominado Liber Abacci. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época e realizou um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes, pois por este livro que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos. A teoria contida no livro Liber Abacci é ilustrada com muitos problemas que representam uma grande parte do livro.

Um dos problemas é o dos pares de coelhos: Quantos pares de coelhos podem ser gerados de um par de coelhos em um ano? Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no início do segundo mês existirão dois pares de coelhos, sendo um par de adultos e outro de coelhos jovens, assim no início do mês 1 existirão 2 pares: 1 par adulto + 1 par recém nascido.

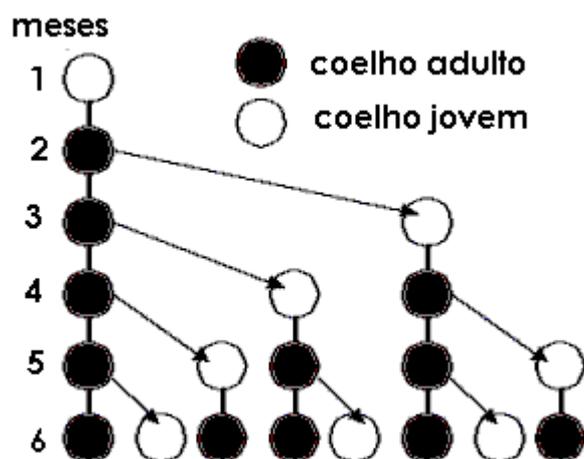


Fig.16

No início do 3º mês o par adulto produzirá de novo mais um par enquanto que o par jovem terá completado 1 mês de vida e ainda não estará apto a produzir, assim no início do terceiro mês existirão três pares de coelhos, sendo: 1 par adulto + 1 par com 1 mês de idade + 1 par recém nascido.

No início do 4º mês, existirão dois pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e um par novo que completou 1 mês, logo teremos 5 pares: 2 pares adultos + 1 par com 1 mês + 2 pares recém nascidos.

No início do 5º mês, existirão três pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e dois pares novos que completaram 1 mês de vida, assim teremos 8 pares: 3 pares adultos + 2 pares(1 mês) + 3 pares recém nascidos.

No início do 6º mês, existirão cinco pares adultos sendo que cada um já produziu um novo par e três pares novos que completaram 1 mês, assim existirão 13 pares: 5 pares adultos + 3 par com 1 mês + 5 pares recém nascidos.

Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. Observa-se esta formação na figura 16, mas também podemos perceber que a seqüência numérica, conhecida como a seqüência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês:

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , ....

Esta seqüência de números tem uma característica especial denominada recursividade:

1º termo somado com o 2º termo gera o 3º termo  
 2º termo somado com o 3º termo gera o 4º termo  
 3º termo somado com o 4º termo gera o 5º termo  
 e assim por diante.

Denotando a seqüência por  $u=u(n)$  como o número de pares de coelhos ao final do mês  $n$ , poderemos escrever:

$$\begin{aligned} U(1) + u(2) &= u(3) \\ U(2) + u(3) &= u(4) \\ U(3) + u(4) &= u(5) \\ U(4) + u(5) &= u(6) \end{aligned}$$

e assim por diante, que é uma propriedade recursiva, isto é, que cada termo pode ser obtido em função dos termos anteriores. No final do mês 12, o número de pares de coelhos deverá ser 144.

Em geral temos:

$$u(n+1) = u(n-1) + u(n)$$

De que forma ocorre esta conexão com a razão de ouro Phi ? Na verdade a seqüência de Fibonacci é dada por:

1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , 89 , 144 , ....

e os termos desta seqüência são denominados números de Fibonacci.

Pode-se tomar a definição desta seqüência para todo  $n$  natural, como:

$$u(1) = 1, u(2) = 1$$

$$u(n+1) = u(n-1) + u(n)$$

Esta seqüência não é limitada superiormente, mas existe um fato interessante: Tomando as razões (divisões) de cada termo pelo seu antecessor, obtemos uma outra seqüência numérica cujo termo geral é dado por:

$$f(n) = \frac{u(n+1)}{u(n)}$$

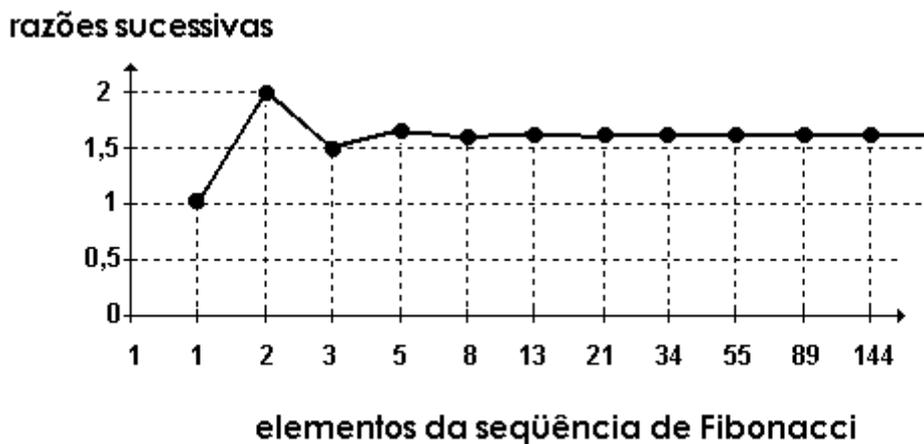
que é uma seqüência limitada.

Se dividirmos sempre um número da seqüência de Fibonacci pelo seu antecessor, obteremos outra seqüência:

$$\frac{1}{1} = 1, \frac{2}{1} = 2, \frac{3}{2} = 1,5, \frac{5}{3} = 1,66\dots, \frac{8}{5} = 1,6, \frac{13}{8} = 1,625$$

$$\frac{21}{13} = 1,615\dots, \frac{34}{21} = 1,618\dots$$

É fácil perceber o que ocorre quando colocamos estas razões sucessivas (alturas) em um gráfico em que o eixo horizontal indica os elementos da seqüência de Fibonacci:



As razões vão se aproximando de um valor particular, conhecido como Número de Ouro (Número Áureo), que é frequentemente representado pela letra grega  $\varphi$  (fi).

Quando  $n$  tende a infinito, o limite é exatamente Phi, o número de ouro.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{f(n-1)} = \varphi = 1,618\dots$$

#### **4. Plano de atividades para o vídeo do número de ouro**

Este plano tem como objetivo maior criar oportunidades para uma aprendizagem significativa das noções de medida, razão, estimativa, números irracionais, radicais e operações com radicais.

O recurso utilizado é um vídeo que traz situações reais para exemplificar o conceito de Razão Áurea e Número de Ouro. É este conceito que será o eixo articulador do trabalho.

Da análise do vídeo, espera-se identificar e relacionar os principais objetos matemáticos ali presentes: número de ouro, razão áurea, retângulo de ouro, espiral, relações sobre o pentágono, propriedades do número de ouro. Nesta tarefa, emergem espontaneamente as noções mais gerais, subjacentes.

Para desenvolver o plano, optamos pela seguinte ordenação, nas relações desejadas:

##### **4.1 Razões e o Número de Ouro**

##### **4.2 Retângulo de Ouro e o Número de Ouro**

##### **4.3 Irrracionalidade e aproximações**

##### **4.4 Propriedades**

##### **4.5 Retângulos e a espiral**

##### **4.6 Incomensurabilidade dos lados do Retângulo de Ouro**

##### **4.7 Pentágono e relações**

##### **4.7 Seqüência de Fibonacci**

ALVO I: alunos de 8ª série

Atividades recomendadas: 1, 2, 3, 4a, 5

ALVO II: alunos de Curso de Licenciatura em Matemática

Atividades recomendadas: todas

OBJETIVOS	ATIVIDADES
<p><b>4.1. Razões e o Número de Ouro</b></p> <p><b>4.1.1.</b> Identificar no vídeo principais objetos matemáticos. Objetos desejados: Número de Ouro, Razão Áurea, Retângulo de Ouro, espiral, relações sobre o pentágono, propriedades do Número de Ouro.</p>	<p>Assistir o vídeo com atenção Listar objetos matemáticos que ali aparecem. O vídeo será apresentado para o grande grupo de alunos que farão uma lista dos termos matemáticos ali encontrados. Ao final, em grande grupo, a professora busca os elementos nomeados pelos alunos. Pode-se voltar ao vídeo para localizá-los.</p>
<p><b>4.1.2.</b> Instigar a busca de relações entre os objetos</p>	<p>Indagar sobre as relações Em grande grupo, examinar a lista de objetos e perguntar sobre as relações entre eles.</p>
<p><b>4.1.3</b> Introduzir a noção de razão áurea, de forma qualitativa, relacionando-a com a idéia de harmonia entre as medidas corporais. <b>4.1.4</b> Encontrar uma aproximação numérica para o número de ouro a partir da noção de razão áurea entre medidas corporais.</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 1</b></p>
<p><b>4.2. Retângulo de Ouro e o Número de Ouro</b></p> <p><b>4.2.1.</b> Identificar a relação que caracteriza um retângulo de ouro <b>4.2.2.</b> Descobrir o modo de construir um retângulo de ouro <b>4.2.3.</b> Construir retângulos com esta propriedade</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 2</b></p>
<p><b>4.3. Irrracionalidade e aproximações</b></p> <p><b>4.3.1.</b> Estabelecer a relação entre os lados por meio de uma equação de segundo grau. <b>4.3.2.</b> Resolver a equação <b>4.3.3.</b> Encontrar o número de ouro expresso por raiz quadrada <b>4.3.4.</b> Comparar este número com sua aproximação decimal <b>4.3.4.</b> Refletir sobre a irracionalidade do número</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 3</b></p>
<p><b>4.4 Propriedades</b></p> <p><b>4.4.1.</b> Deduzir as propriedades (operações com radicais)</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 4</b></p>
<p><b>4.5. Retângulos e a espiral</b></p> <p><b>4.5.1.</b> Deduzir a preservação das propriedades <b>4.5.2.</b> Construir a espiral</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 5</b></p>
<p><b>4.6. Incomensurabilidade dos lados do Retângulo de Ouro</b></p> <p><b>4.6.1.</b> Definir a relação de comensurabilidade entre dois segmentos <b>4.6.2.</b> Verificar a incomensurabilidade dos lados do Retângulo de Ouro <b>4.6.3.</b> Relacionar as noções de incomensurabilidade e irracionalidade</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 6</b></p>
<p><b>4.7 Pentágono e relações</b></p> <p><b>4.7.1.</b> Construir um pentágono inscrito num círculo. <b>4.7.2.</b> Construir a estrela de 5 pontas <b>4.7.3.</b> Deduzir que a razão entre a diagonal do pentágono e seu lado é o Número de Ouro.</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 7</b></p>
<p><b>4.8. Seqüência de Fibonacci</b></p> <p><b>4.8.1.</b> Deduzir a seqüência de Fibonacci <b>4.8.2.</b> Verificar as razões entre os elementos da seqüência de fibonacci.</p>	<p style="text-align: center;"><b>FICHA 8</b></p>

## FICHA 1

O número de Ouro relacionado com harmonia entre as formas humanas.

1. Utilize a fita métrica para medir partes do corpo de seu colega, preenchendo a tabela seguinte.

TABELA A

ALTURA DA PESSOA A	ALTURA DO UMBIGO B	ALTURA DA FACE DO QUEIXO AO ALTO DA TESTA C	ALTURA DA FACE DO QUEIXO ATÉ OS OLHOS D

2. Utilize a calculadora para relacionar as medidas, preenchendo a próxima tabela.

TABELA B

A/B	C/D

3. Compare os números obtidos com os números de seus colegas.

**Conclusão:** As medidas variam de pessoa para pessoa mas a razão de proporcionalidade que rege a beleza é a mesma para a maioria das pessoas. Este número é uma aproximação do Número de Ouro, um número que está associado a idéia de beleza e de harmonia do corpo humano.

O Número de Ouro é aproximadamente 1,6.

Calcule o valor de seu inverso. Este valor é encontrado, nos exemplos anteriores, se você dividir a menor medida pela maior.

## FICHA 2

1. Analise a coleção de figuras do material em anexo 1. São fotografias de prédios existentes em diversas cidades européias nas quais destacamos retângulos especiais.

Prédio	Comprimento	Altura	Altura/comprimento
A			
B			
C			
D			
E			

Em alguns destes retângulos, a razão entre altura e comprimento se aproxima do Número de Ouro (1,6) ou de seu inverso (0,6). Retângulos com esta propriedade são chamados de Retângulos de Ouro.

Muitos arquitetos, desde a Antiguidade até os dias de hoje, utilizam esta proporção propositalmente, pois acreditam que prédios que mostram esta relação são mais harmoniosos do que os outros. O que você acha?

2. Com régua, esquadro e compasso, trace dois retângulos de ouro, em diferentes tamanhos. Existe um método para esta construção.

Siga as seguintes etapas:

**Etapa 1:** Trace um quadrado qualquer e nomeie ABCD, de tal modo que AB corresponda a sua base. Este quadrado tem lado de medida  $a$ .

**Etapa 2:** Divida AB meio e marque ali o ponto M. Trace uma perpendicular a este ponto, dividindo o quadrado em dois.

**Etapa 3:** Escolha um destes retângulos, digamos aquele com base AM. Trace sua diagonal, passando por M.

**Etapa 4:** Passe uma semi-reta a partir de M, contendo AM.

**Etapa 5:** Com o compasso, com a ponta sobre M, transfira a medida da diagonal para esta semi-reta. Marque ali o ponto E.

**Etapa 6:** Trace um novo retângulo utilizando os pontos CBE, como vértices.

2.1. Os lados deste retângulo têm medida  $a$  e  $a+b$ . Calcule o valor de  $b$  e de  $a+b$ , a partir de  $a$ , usando o Teorema de Pitágoras.

2.2. Este novo retângulo é um retângulo de ouro, isto é, a razão entre o lado maior e o lado menor é igual ao número de ouro. Verifique, calculando  $a+b/a$ .

### FICHA 3

Na Ficha 2, você vê que um Retângulo de Ouro é criado a partir de um quadrado. O que define o Retângulo de Ouro é o fato que ele pode ser decomposto em um quadrado, obtido com o lado menor, e um outro retângulo, semelhante a ele. Matematicamente, semelhança implica medidas proporcionais. As medidas dos lados do retângulo maior são proporcionais às medidas dos lados do retângulo menor.

Um Retângulo de Ouro cujos lados medem  $a+b$  e  $a$ , é um retângulo que obedece a seguinte relação:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Nesta ficha, vamos utilizar esta relação para calcular o valor exato do Número de Ouro.

1. Verifique se a Figura construída na Ficha 2 obedece esta propriedade.
2. Para facilitar os cálculos, vamos supor o Retângulo de Ouro maior tem lados 1 e  $a$ , com  $1 > a$ . Faça um desenho, para encontrar as medidas do retângulo menor.
3. Como fica a relação de proporcionalidade? Expresse-a por uma equação.
4. Resolva a equação obtida e encontre o valor de  $a$ . Calcule também o valor da razão  $1/a$ . Este número é o Número de Ouro,  $\varphi$ . O valor  $a$  é o inverso,  $1/\varphi$ .
5. Utilize a calculadora para calcular uma aproximação decimal para cada um dos números encontrados  $\varphi$  e seu inverso  $1/\varphi$ .

#### FICHA 4

Sabendo que o número de ouro é :

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \text{ (fi)}$$

Prove as seguintes propriedades:

1.

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

2.

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

Sabe-se que o número de ouro  $\varphi$  é o valor da razão  $1/a$ , na seguinte equação:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

3. Mostre a seguinte equivalência:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} - 1$$

4. Use a segunda equação para provar as seguintes propriedades:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

## FICHA 5

A partir de um Retângulo de Ouro, pode-se construir muitos outros, cada vez menores, todos com a mesma propriedade. Isto se faz decompondo cada retângulo em duas partes: o quadrado formado pelo seu lado menor e o retângulo restante. Este retângulo menor também é de Ouro. É a propriedade da autopropagação.

Esta coleção de retângulos de ouro, encaixados, dá origem a uma espiral.

1. Vamos construir esta espiral.

**Etapa 1:** Inicie com um Retângulo de Ouro. Trace um quadrado, no seu interior, usando o lado menor.

**Etapa 2:** Focalize o retângulo que resta. Mostre que ele também é de Ouro.

2. Repita o processo menos mais duas vezes.

3. Observe a coleção de quadrados que foi obtida.

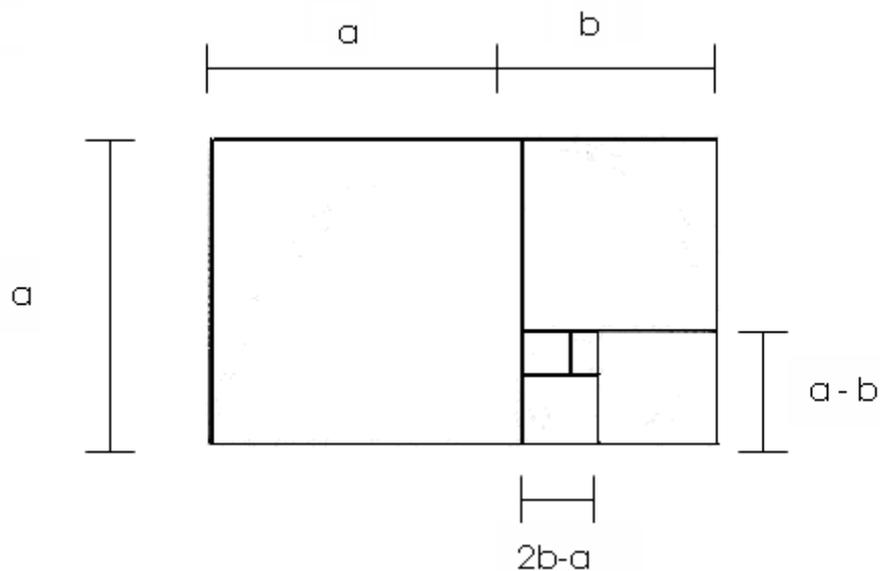


Fig. 10

4. Trace uma linha poligonal contínua utilizando as diagonais destes quadrados, adequadamente escolhidas.

5. Substitua cada segmento desta linha por um arco de círculo, cujo raio é o lado do quadrado. Você vai obter uma espiral.

## FICHA 6

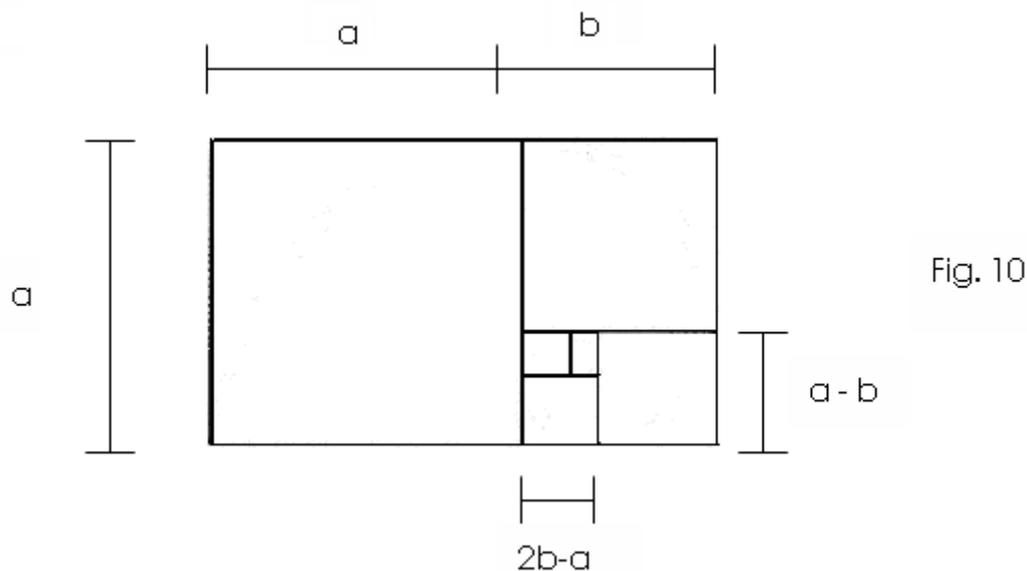
Nesta ficha vamos definir a relação de comensurabilidade entre dois segmentos, com o objetivo de mostrar que os lados de um Retângulo de Ouro não são comensuráveis. Este fato vai comprovar o que já dizemos antes, o Número de Ouro é irracional.

Dois segmentos AB e CD são comensuráveis se for possível medi-los com uma mesma unidade de medida, e o resultado desta medição for um número inteiro e positivo.

Matematicamente, isto quer dizer que existe uma unidade de medida  $u$  tal que  $AB = m u$  e  $CD = n u$ , com  $m$  e  $n$ , números inteiros e positivos.

Queremos provar que os lados de um retângulo áureo são incomensuráveis.

Consideremos a seguinte figura, obtida pelo processo de autopropagação, a partir de um Retângulo de Ouro, cujo lado maior é  $a+b$  e o lado menor é  $a$ .



1. Identifique no desenho uma seqüência de Retângulos de Ouro, encaixados, cujos lados decrescem, se tornando cada vez menores. Encontre as medidas dos lados dos 5 Retângulos de Ouro visíveis na figura, a partir de  $a$  e  $b$ .

2. A seqüência de medidas é infinita, decrescente e aproxima-se de zero. Você concorda? Justifique.

3. Suponhamos que os lados do retângulo maior sejam comensuráveis. A hipótese da comensurabilidade dos lados implica dizer que existe uma unidade de medida  $u$  tal que o lado maior  $a + b = m.u$  e o lado menor  $a = n. u$ , com  $m$  e  $n$  números inteiros e positivos. Em conseqüência, todos os números da seqüência acima seriam inteiros e positivos. Você concorda? Justifique? Mas isto é um absurdo pois não existe seqüência infinita e decrescente de números inteiros positivos, aproximando-se cada vez mais do zero. Porque?

4. Concluímos então que os lados de um Retângulo Áureo são incomensuráveis. Você concorda? Justifique.

5. Ao descobrir que os lados de um Retângulo de Ouro não são comensuráveis, descobrimos que a razão entre eles não é um número racional. Seja qual for o Retângulo de Ouro, ABCD, a razão entre dois lados AB e BC, não pode ser expressa como o quociente de dois números inteiros  $m/n$ . Mas esta razão é  $\phi$  ou seu inverso  $1/\phi$ , logo  $\phi$  não pode ser expresso como uma razão de números inteiros  $m/n$ . Conclusão,  $\phi$  é um número irracional. Você concorda? Justifique.

## FICHA 7

Um pentágono é um polígono de com cinco lados iguais. Nesta ficha vamos construir um pentágono e mostrar que a razão entre uma diagonal e o lado é o Número de Ouro.

1. Trace uma circunferência de raio qualquer.
2. Com um transferidor divida o ângulo central da circunferência em 5 ângulos iguais a  $72^\circ$ , cada um.
3. Estes ângulos determinam 5 pontos A,B,C, D, E sobre a circunferência. Uma estes pontos. A figura obtida é um pentágono.
4. Trace as diagonais do pentágono. A figura obtida é uma estrela de 5 pontas.
5. Destaque na figura o triângulo ABC. Este triângulo é isósceles? Justifique.
6. Calcule os valores dos ângulos do triângulo ABC.
7. Utilize a noção de seno para calcular a razão  $AC/AB$ .
8. Veja que AC é uma diagonal do pentágono e AB é um lado do pentágono.
9. Verifique que a razão entre a diagonal e o lado coincide com o Número de Ouro.

## FICHA 8

“Um homem tem um par de coelhos em um ambiente inteiramente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerados deste par em um ano, se de um modo natural a cada mês ocorre a produção de um par e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida”.

1. Construa uma seqüência de números que expresse, a cada mês, o número total de coelhos que o homem possui.

A seqüência obtida é  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ , denominada seqüência de Fibonacci, é expressa pela seguinte equação de recorrência:

$$u(1) = 1, u(2) = 1$$
$$u(n+1) = u(n-1) + u(n)$$

definida para todo natural  $n$

2. Utilize-a para completar a tabela seguinte:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
	$\frac{a_2}{a_1}$	$\frac{a_3}{a_2}$	$\frac{a_4}{a_3}$	$\frac{a_5}{a_4}$	$\frac{a_6}{a_5}$	$\frac{a_7}{a_6}$	$\frac{a_8}{a_7}$	$\frac{a_9}{a_8}$	$\frac{a_{10}}{a_9}$

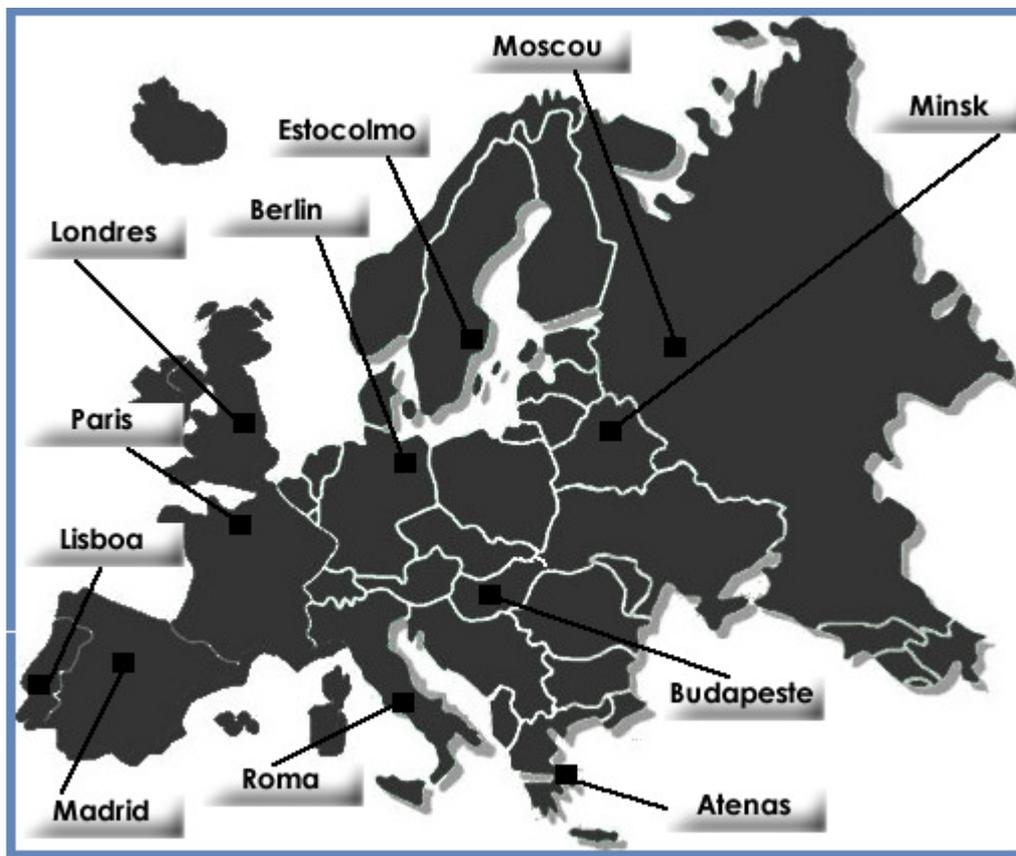
3. Verifique que as razões entre os elementos da seqüência se aproximam de  $\varphi$ .

## **5. Bibliografia Recomendada:**

- Revista do Professor de Matemática, vol. 6, primeiro semestre de 1985,
- Revista do Professor de Matemática, vol. 16, primeiro semestre de 1990,
- Revista do Professor de Matemática, vol. 24, segundo semestre de 1993,
- As Maravilhas da Matemática – Malba Tahan

## 6. Anexo 1 – Material para a atividade da ficha 2.

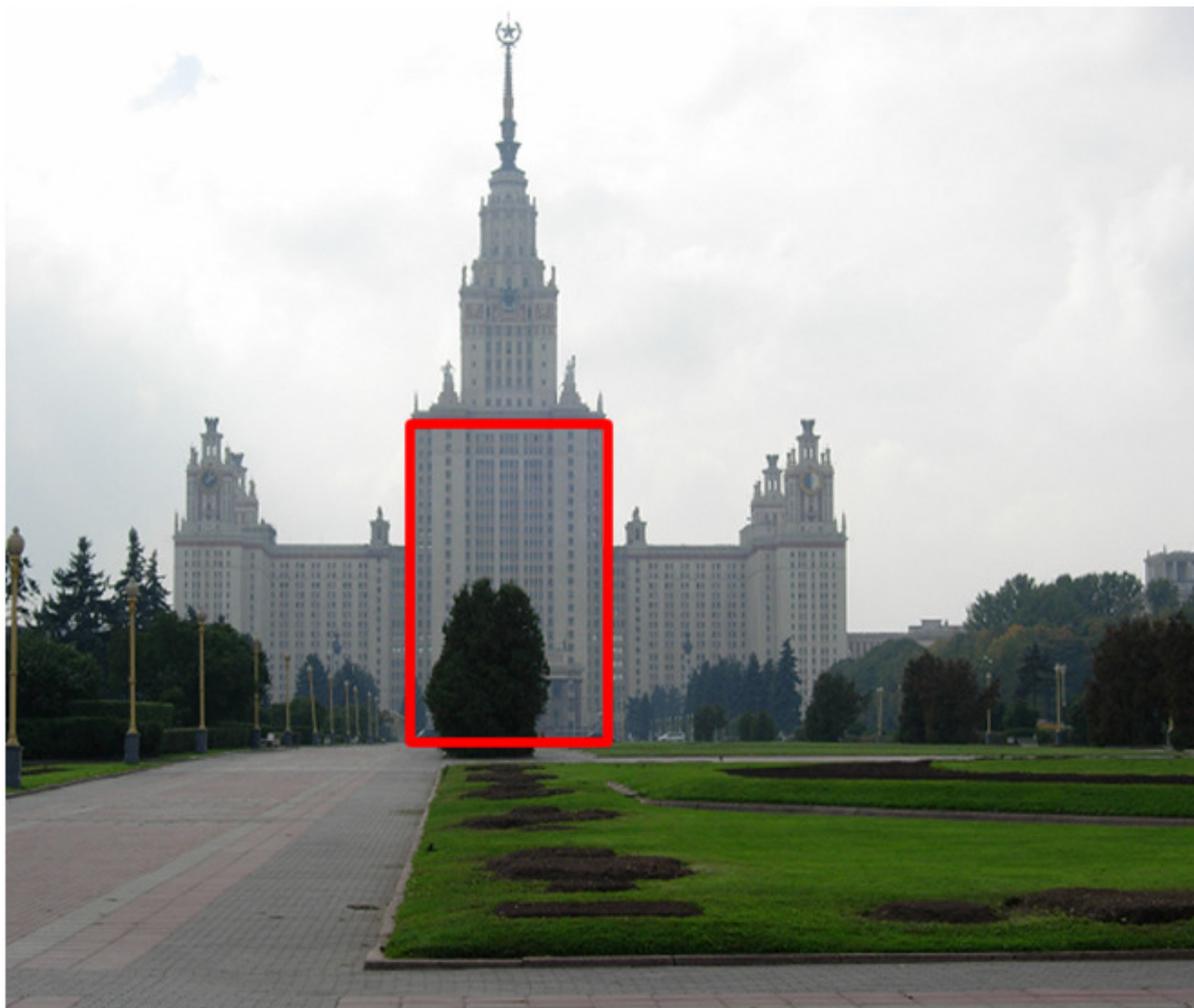
Em algumas cidades da Europa como mostra o mapa abaixo, existe prédios históricos especiais. Escolhemos alguns destes prédios para desenvolvermos esta atividade:



Os povos antigos acreditavam em uma noção de perfeição da forma, que era traduzida por uma razão, chamada “razão Áurea”. As pessoas que possuíssem esta razão entre algumas de suas medidas, eram consideradas símbolos de beleza e harmonia. Da mesma forma eles utilizavam este padrão em prédio, pinturas e arquitetura.

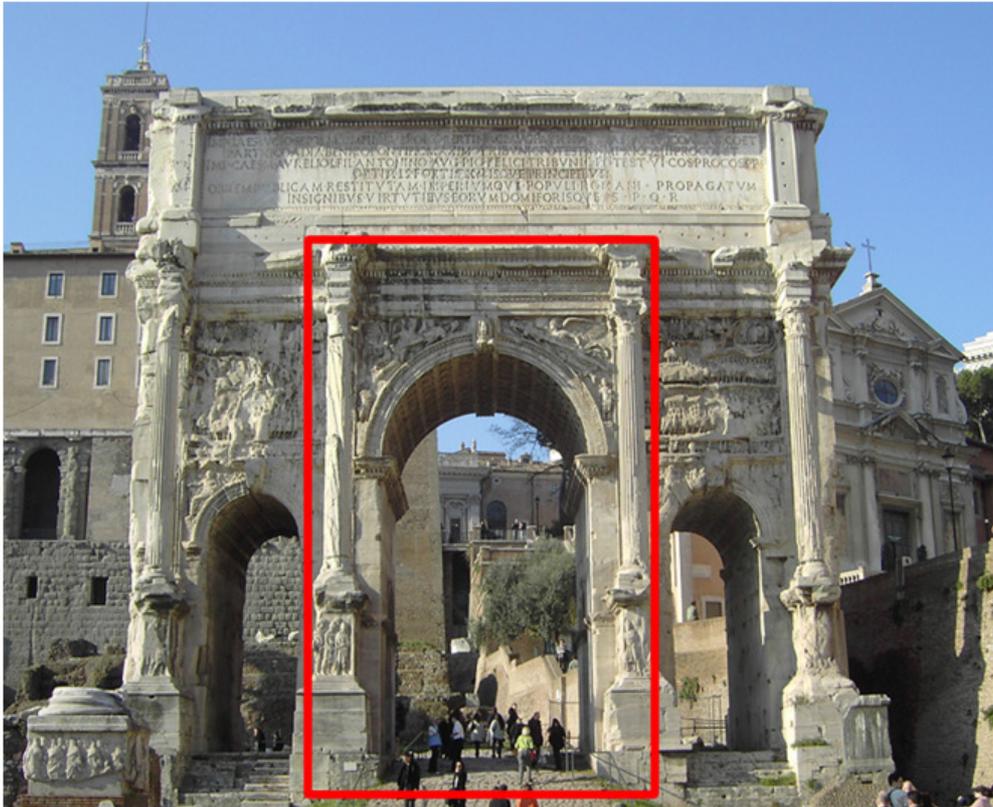
Esta atividade consiste em procurar nestes prédios históricos retângulos que possuam aproximadamente esta razão, ou seja, quando dividirmos um lado pelo outro encontraremos o número de ouro:  $\Phi = 1,681\dots$ .

### Universidade de Moscou - Moscou



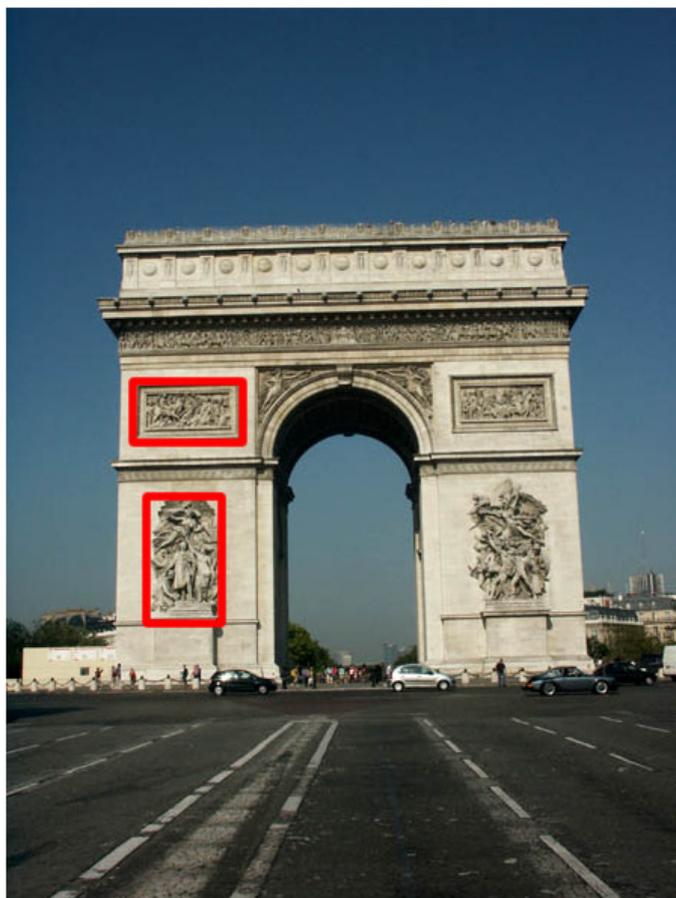
Cidade muito antiga tornou-se sede do Grão-Ducado de Moscou e mais tarde capital russa. Ocupada pela Polônia de 1572 a 1612. Deixou de ser capital do Império em 1712 quando a corte foi transferida para São Petersburgo. Em 14 de Setembro de 1812, quando Napoleão entrou na cidade, encontrou-a vazia. No dia seguinte, três quartos de Moscou estavam em chamas. Estes eventos foram dramatizados por Leon Tolstoi em Guerra e Paz.

## Arco de Septímio Severo – Roma



O arco de Septímio Severo é um arco triunfal construído no lado noroeste Fórum romano, em Roma, próximo ao templo de Saturno, com uma passagem central ladeada por duas outras mais estreitas. Foi dedicado em 203 d.C. pelo Senado ao imperador Septímio Severo e aos seus dois filhos, Caracala e Geta, para celebrar a vitória com os Partas, conseguida com duas campanhas militares que concluíram respectivamente 195 d.C. e no ano da dedicação.

## Arco do Triunfo - Paris



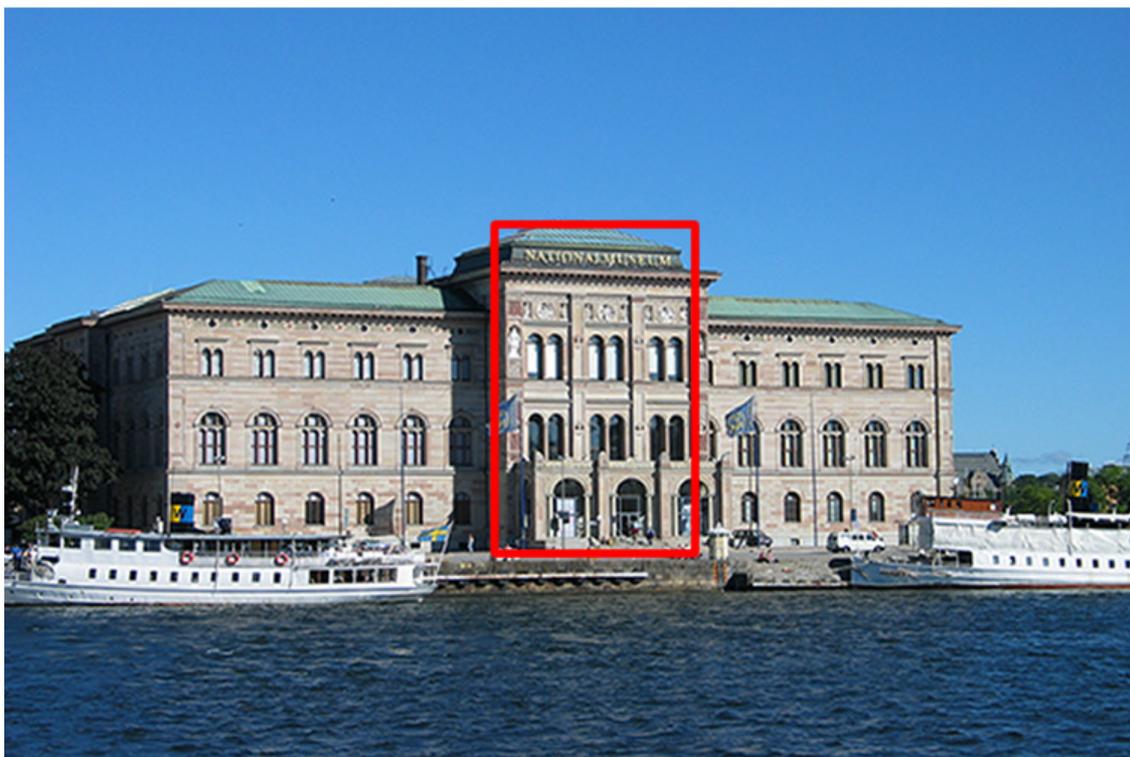
O Arco do Triunfo (francês: Arc de triomphe) é um monumento da cidade de Paris construído para comemorar as vitórias militares de Napoleão Bonaparte, que ordenou a construção em 1806 ao arquitecto Chalgrin. Foi inaugurado em 1836. Tem gravados os nomes de 128 batalhas e 558 generais. Na sua base situa-se o Túmulo do Soldado Desconhecido, construído em 1920. Situa-se na praça Charles de Gaulle, onde termina a mais famosa avenida de Paris, a Champs-Élysées.

## Castelo de Buda - Budapeste



Budapeste tem 9 pontes, sendo a mais conhecida a Széchenyi Lánchíd. Os edifícios mais característicos e importantes são o Castelo de Buda (Budai Vár), o Parlamento (Országház) e o Teatro Nacional, divulgados nos mais conhecidos cartões-postais da cidade, que tem, como o turismo, uma fonte de rendimento de crescente importância.

## Museu Nacional de Belas Artes - Estocolmo



O Museu Nacional de Belas-Artes é um dos mais importantes museus de arte da Suécia. Localizado em Estocolmo, a capital do país, este museu alberga impressionantes coleções de arte não só sueca, mas também de outros países, doada, primeiramente, pelos reis Gustavo III e Carl Gustaf Tessin.

O museu foi fundado em 1792. Todavia, o edifício que hoje o alberga, somente foi construído em 1866. O edifício, imponente e robusto, conserva traços da arquitetura florentina e veneziana renascentista.

O museu, atualmente, conta com mais de 1.000.000 de desenhos e pinturas, um enorme e riquíssima coleção de porcelanas, com especial destaque para as porcelanas chinesas, esculturas e uma ótima coleção de arte moderna. Além disso o Museu Nacional alberga uma boa livreria de arte.

## Parlamento Alemão – Reichstag - Berlin



Reichstag é o nome do prédio onde o parlamento federal da Alemanha (Bundestag) exercia suas funções. Fica localizado em Berlim.

Nos seus mais de cem anos de história, o prédio do Reichstag foi a sede de governo em duas guerras. Em 1992 foi decidido que o Reichstag deveria ser reconstruído e foi escolhido o projeto de Norman Foster. Em 1995, o artista Christo atraiu milhões de visitantes ao cobrir o prédio inteiro. A reconstrução foi um sucesso, especialmente pela construção da cúpula em memória da cúpula original de 1894.

Esta é uma das melhores atrações para os turistas, pois ela é aberta a visitas.

## 7. Anexo 2 – O número de ouro na internet

---

O **Partenon** (em [grego](#): Παρθενων) é a mais famosa construção da [Grécia Antiga](#) que restou até os dias atuais. Sua edificação foi uma homenagem à deusa [Atena](#), patrona da cidade.

O mais admirado dos templos gregos, e o maior de todo o continente helénico, construído na [Acrópole](#) de Atenas (em substituição do que fora destruído no saque persa) entre 447 e 438 a.C., por [Ictinos](#) e [Calícrates](#). A parte da escultura, executada por [Fídias](#) e seus discípulos, levou mais de sete anos a concluir. É todo de mármore do [Pentélico](#), excepto os alicerces, e em [estilo dórico](#) (embora o friso interior e mais um ou outro pormenor sejam jónicos). O [peristilo](#) tem 17 colunas de cada lado e 8 nos extremos (mais 2 do que o habitual).



Pormenores dos relevos do frontão.

Na *cella* encontrava-se a famosa estátua de *Athena Parthenos*, por Fídias. As 92 métopas do friso exterior representam a luta dos Centauros com os Lápitais, a Gigantomaquia, o Amazonomaquia e outros combates; o pedimento do lado nascente, o nascimento de Atena, e o do lado poente, a luta entre a deusa e [Poseidon](#), pela posse da cidade; o friso exterior, o procissão das [Panateneias](#), com os deuses a observá-la. O edifício, em que foram aplicados todos os requintes da êntase, manteve-se quase intacto até 1687, data em que uma explosão de pólvora nele armazenada, durante a guerra entre Turcos e Venezianos, destruiu a cobertura e fez outras danificações. As partes do pedimento e métopas foram barbaramente saqueados por [Lord Elgin](#) e vendidos ao [British Museum](#), em 1816; outras foram para o [Louvre](#); outras ainda se conservam *in loco*.

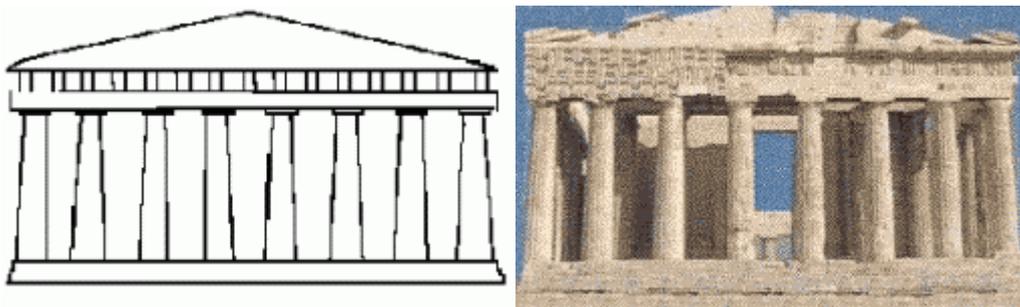
---

Disponível em: <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Parthenon>>.

Acesso em 27 ago 2006.

---

Há vários exemplos sobre o modo como o retângulo áureo se ajusta à construção do Parthenon. O Parthenon, agora em ruínas, é um dos templos que foi construído em Atenas por volta dos anos 430-440 a.C. e nele podemos observar a proporção Áurea. A planta do Parthenon mostra que o templo foi construído tendo por base um retângulo com comprimento igual a raiz quadrada de 5 e largura igual a 1.



---

Disponível em:

<<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>>

Acesso em 27 ago 2006.

---

Nos desenhos de fachada da *Villa à Garches* publicados na *Oeuvre Complète* (6), Le Corbusier preocupa-se em demonstrar a pureza geométrica do retângulo áureo onde elas estão inscritas, juntamente com seus *tracés régulateurs*. E é justamente nestes desenhos que ficará clara a falta de parentesco entre as duas fachadas.



Villa Stein, Garches. Le Corbusier, 1927. Fachada do Jardim

---

Disponível em: <<http://www.vitruvius.com.br/arquitextos/ara000/esp333.asp>>

Acesso em : 27 ago 2006.

---

A Escola Pitagórica funcionava na realidade como uma seita. Os Pitagóricos, para além de outros símbolos e rituais místicos, usavam o *pentágono estrelado*, como sinal de aliança entre eles. Os conhecimentos matemáticos e as principais descobertas da Escola eram transmitidos oralmente aos seus membros que, sob juramento, se comprometiam a não os divulgar. É curioso que, apesar de a sua doutrina ser ensinada apenas oralmente durante as primeiras décadas, a Escola sobreviveu várias centenas de anos. Prolongaram-se por oito séculos (V AC a III DC), o desenvolvimento de especulações matemáticas, astronómicas e harmónicas, mas também de natureza física ou médica, e ainda morais e religiosas que se associam ao Pitagorismo.

---

Disponível em: <[http://triplov.com/alquimias/iserra\\_2001.html](http://triplov.com/alquimias/iserra_2001.html)>  
Acesso em: 27 ago 2006.

---

Este era o princípio da Escola pitagórica, a qual atribuem-se inúmeras contribuições nos ramos da Matemática, Geometria e Filosofia. A confraria pitagórica foi uma seita secreta, de carácter religioso, que reuniu cerca de 300 jovens homens que se dedicavam ao estudo da Matemática e da Filosofia. Eles participavam ativamente da política local, apesar de não se misturarem com os outros cidadãos, e usavam essas duas disciplinas para a formação moral dos participantes, que viviam juntos no Centro em Crotona (ver figura 1) - cidade da península itálica - em regime de comunhão de bens.

---

Disponível em:  
<<http://www.adorofisica.com.br/trabalhos/alkimia/mat2/TRAB1.htm>>  
Acesso em: 27 ago 2006.

---

Aplicação: a razão áurea em uma obra de Leonardo da Vinci usando o programa régua e compasso.

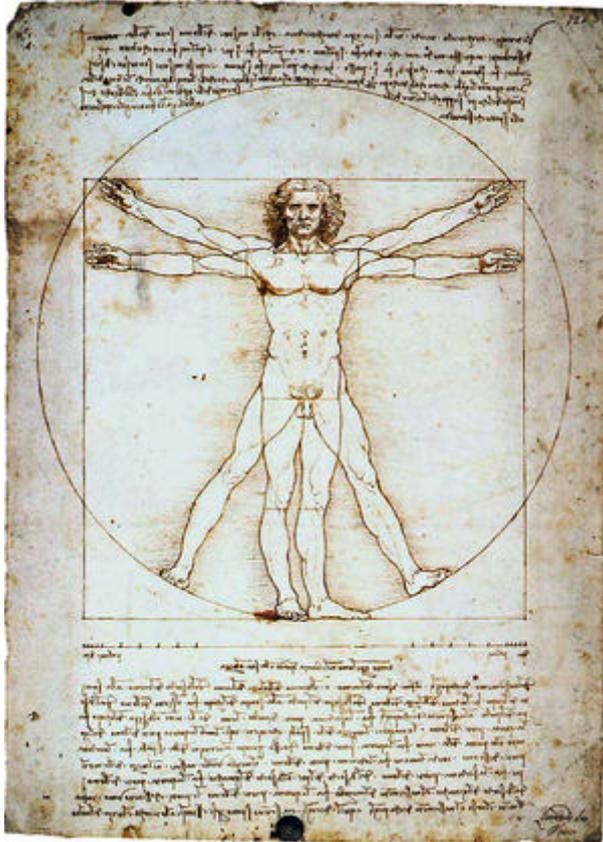
---

Disponível em:  
<<http://www.professores.uff.br/hjbortol/car/tutorial/car-tutorial-21-gif/car-tutorial-21-main-gif.html>> Acesso em 27 ago 2006.

## Homem Vitruviano (desenho de Leonardo da Vinci)

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Ir para: [navegação](#), [pesquisa](#)



Homem Vitruviano

**Data:** 1490 – **Técnica:** Lápis e tinta - **Dimensão:** 34 x 24 cm

O [Homem Vitruviano](#) é um desenho famoso que acompanhava as notas que [Leonardo da Vinci](#) fez ao redor do ano [1490](#) num dos seus diários. Descreve uma figura masculina desnuda separadamente e simultaneamente em duas posições sobrepostas com os braços inscritos num [círculo](#) e num [quadrado](#). A cabeça é calculada como sendo um décimo da altura total. Às vezes, o desenho e o texto são chamados de Cânone das Proporções.

O desenho actualmente faz parte da colecção/colecção da [Gallerie dell'Accademia](#) (Galeria da Academia) em [Veneza, Itália](#).

Examinando o desenho, pode ser notado que a combinação das posições dos [braços](#) e [pernas](#) formam quatro posturas diferentes. As posições com os braços em cruz e os pés são inscritas juntas no quadrado. Por outro lado, a posição superior dos braços e das pernas é inscrita no círculo. Isto ilustra o princípio que na mudança entre as duas posições, o centro aparente da figura parece se mover, mas de fato o [umbigo](#) da figura, que é o verdadeiro centro de [gravidade](#), permanece imóvel.

O Homem Vitruviano é baseado numa famosa passagem do arquitecto/arquiteto romano [Marcus Vitruvius Pollio](#), em que ele descreve as proporções do corpo humano:

- Um [palmo](#) é a largura de quatro [dedos](#)
- Um [pé](#) é a largura de quatro palmos
- Um [antebraço](#) é a largura de seis palmos
- A altura de um homem é quatro antebraços (24 palmos)
- Um passo é quatro antebraços
- A longitude dos braços estendidos de um homem é igual à altura dele
- A distância entre o nascimento do [cabelo](#) e o queixo é um décimo da altura de um homem
- A distância do topo da [cabeça](#) para o fundo do queixo é um oitavo da altura de um homem
- A distância do nascimento do cabelo para o topo do peito é um sétimo da altura de um homem
- A distância do topo da cabeça para os [mamilos](#) é um quarto da altura de um homem
- A largura máxima dos [ombros](#) é um quarto da altura de um homem
- A distância do [cotovelo](#) para o fim da mão é um quinto da altura de um homem
- A distância do cotovelo para a [axila](#) é um oitavo da altura de um homem
- A longitude da [mão](#) é um décimo da altura de um homem
- A distância do fundo do [queixo](#) para o [nariz](#) é um terço da longitude da face
- A distância do nascimento do cabelo para as sobrancelhas é um terço da longitude da face
- A altura da [orelha](#) é um terço da longitude da face

O redescobrimto das proporções matemáticas do [corpo humano](#) no [século XV](#) por Leonardo e os outros é considerado uma das grandes realizações que conduzem ao [Renascimento](#) italiano.

O desenho também é considerado freqüentemente como um símbolo da simetria básica do corpo humano e, para extensão, para o [universo](#) como um todo. É interessante observar que a área total do círculo é idêntica à área total do quadrado e este desenho pode ser considerado um algoritmo matemático para calcular o valor do número irracional 'phi' (=1,618).

---

Disponível em:

<[http://pt.wikipedia.org/wiki/Homem\\_Vitruviano\\_%28desenho\\_de\\_Leonardo\\_da\\_Vinci%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Homem_Vitruviano_%28desenho_de_Leonardo_da_Vinci%29)> Acesso em: 27 ago 2006.

---

O Homem Vitruviano ( 1492), desenho de Leonardo, das proporções da forma humana, baseia-se em uma célebre passagem do arquiteto romano Vitruvius, em que ele expõe como a figura humana deitada de barriga para cima com as mãos e pernas abertas poderia ser rodeada tendo o umbigo como centro do círculo. Ele aconselha ainda que a figura pode também estar contida precisamente dentro de um quadrado. A cabeça é avaliada como sendo um décimo da altura total.

---

Disponível em:

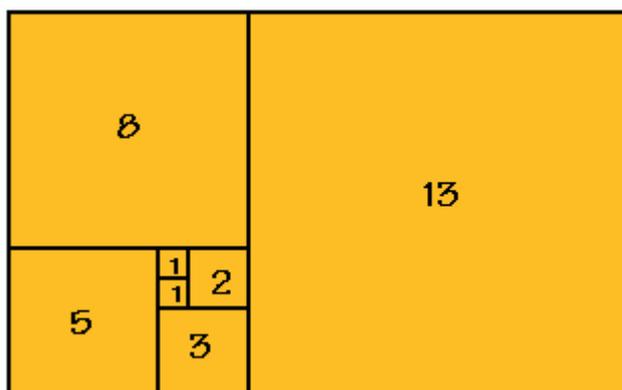
<<http://www.brasilecola.com/pedagogia/leonardo-da-vinci.htm>>

Acesso em 27 ago 2006.

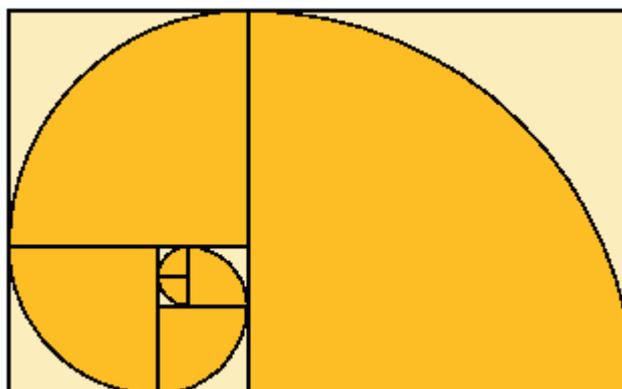
---

### Retângulo Áureo e o Nautilus

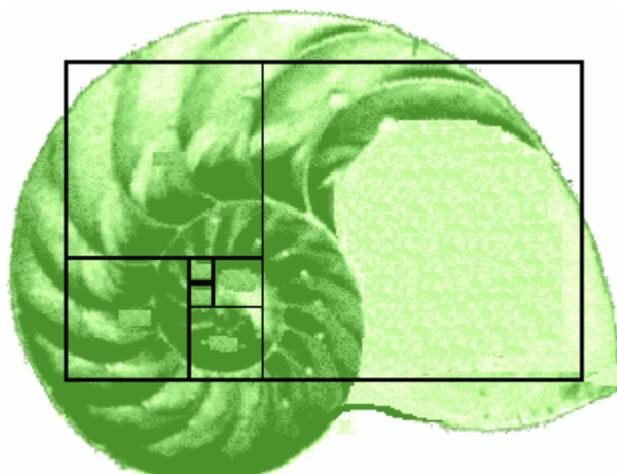
Anexando dois quadrados com lado=1, teremos um retângulo 2x1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexamos agora outro quadrado com lado=2 (o maior lado do retângulo 2x1) e teremos um retângulo 3x2. Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior. A sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3,5,8,13,... que é a sequência de Fibonacci.



Usando um compasso, trace um quarto de círculo no quadrado de lado  $L=13$ , de acordo com o desenho ao lado. De acordo com o desenho ao lado, trace quartos de círculos nos quadrados de lado  $L=8$ ,  $L=5$ ,  $L=3$ ,  $L=2$ ,  $L=1$  e  $L=1$ .



Com as concordâncias dessas curvas, obtemos uma espiral como a do *Nautilus marinho*. Você acha que o "Nautilus" estudou Matemática para construir a sua casa?



---

Disponível em:

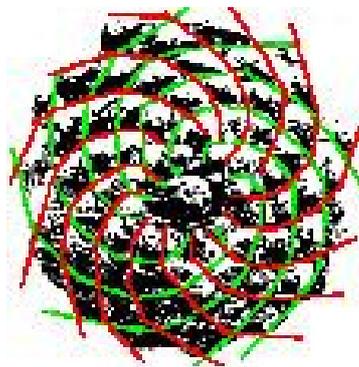
<<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm>>

Acesso em 27 ago 2006.

## 8. Anexo 3 – O número de Ouro na Natureza

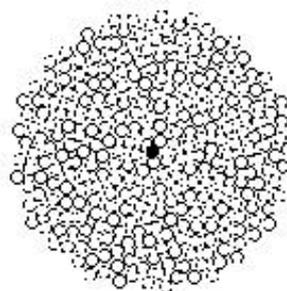
### Pinhas

A espiral de ouro pode ser encontrada nas pinhas. Podemos ver que as sementes nas pinhas parecem formar espirais que curvam quer para a direita quer para a esquerda. Se contarmos as espirais, verificaremos que há 34 que curvam para a direita, e 55 que curvam para a esquerda. Estes dois valores são dois dos termos consecutivos da sucessão de Fibonacci. Esta disposição permite que as sementes se encontrem distribuídas uniformemente, não se encontrando concentradas demais no centro e dispersas demais nos bordos, tendo todas as sementes o mesmo tamanho.



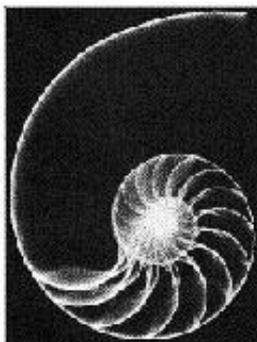
### Girassóis

O padrão apresentado nas pinhas não é perfeito na maioria dos girassóis, mas se conseguirmos encontrar um bom espécime verificaremos que as suas sementes formam espirais curvando quer para a esquerda quer para a direita, de forma que todas fiquem equidistantes. Afirma-se que esta disposição permite melhorar a eficiência dos girassóis na captação de água e de luz. Além disso, as pétalas dos girassóis encontram-se em pares de 21 e 34 pétalas, ou 34 e 55, ou 55 e 89, que são números consecutivos da sucessão de Fibonacci.



### As conchas marinhas (Nautilus)

O diagrama à direita mostra uma concha marinha. Podemos ver que é possível desenhar uma espiral ao longo da concha, que é exatamente a espiral de ouro. Isto acontece devido ao fato de o crescimento da concha ser proporcional ao crescimento do organismo que contém.



### O embrião humano

É possível observar que no desenvolvimento do embrião humano aparece um padrão semelhante ao que permite traçar a espiral de ouro. Este padrão ocorre devido ao organismo ser proporcional ao seu tamanho.



## Anexo 4 – O número de ouro na arquitetura

### Parthenon

Construído entre 447 e 433 a.C. o Parthenon Grego, ou templo da deusa Atena, representativo do século de Péricles, revela em seu frontispício um quase exato retângulo áureo. O escultor e arquiteto encarregado da construção deste templo foi Fídias.



### O Templo de Denara

O Templo de Dendara foi conhecido como a morada de Hathor, a deusa do amor, felicidade e beleza. As arcadas são proporcionais ao retângulo áureo, e no interior do templo existe uma escadaria em espiral, com uma forma muito semelhante à da espiral de ouro.



## O Templo de Philae

Em egípcio antigo, 'Philae' significa 'o fim', e definia a fronteira sul do Egito. Este templo era dedicado à deusa Isis, esposa de Osiris e mãe de Horus.

Na fachada do templo são visíveis os vários retângulos, e existem inúmeras arcadas criadas por centenas de pilares, todos eles proporcionais ao retângulo áureo.



## As Pirâmides do Egito

Os Egípcios chamavam o número de ouro de "número sagrado" tendo este uma importância extrema na sua religião. Utilizavam-no para a construção de templos e sepulcros para os mortos, pois consideravam que caso isto não acontecesse, o templo poderia não agradar aos Deuses ou a alma do falecido não conseguiria chegar ao Além. Além disso, os Egípcios consideravam-no muito agradável esteticamente, usando-o também no seu sistema de escrita e na decoração dos seus templos.

O Papiro de Ahmes mostra-nos os planos para a construção da Grande Pirâmide de Gizé (4700 a.C.), com proporções de acordo com o "número sagrado".

