Dízimas periódicas... e a calculadora

José Roosevelt Dias
Niterói, RJ

Na **RPM** 10, p. 23, no artigo "Voltando a falar sobre dízimas", de Elon Lages Lima, encontram-se resultados que permitem calcular o número de algarismos do período de uma dízima periódica simples. O artigo nos conta, por exemplo, que $1/23$ é uma dízima cujo período tem 22 algarismos.

A **RPM** recebeu, recentemente, um artigo do colega José Roosevelt Dias, ensinando como uma calculadora simples nos permite obter, rapidamente, esses 22 algarismos e, em geral, os primeiros algarismos (20, 30, 40, ..., quantos quisermos) da expansão decimal de $1/n$, n inteiro, diferente de zero.

Extraímos do artigo as principais idéias.

As calculadoras simples têm um visor para 8 dígitos, o que permitirá obter, cada vez que usarmos a calculadora, 7 dígitos da expansão decimal de $1/n$.

Há um só pré-requisito: é necessário saber calcular os restos da divisão de $10^7, 10^{14}, 10^{21}, 10^{28}, \ldots$ pelo número n. (Através de "congruência" isto fica fácil — veja **RPM** 10, p. 40.)

Ilustraremos o processo, calculando o período da dízima periódica $1/23$:

1) a calculadora nos diz que $1/23 \cong 0{,}0434782$ e temos aí os 7 primeiros algarismos da expansão decimal de $1/23$;
2) o resto da divisão de 10^7 por 23 é 14 ($10^7 \equiv 14 \ (mod\, 23)$) e a calculadora nos diz que $14/23 \cong 0{,}6086956$.
Estes são os 7 algarismos seguintes da expansão de $1/23$:

$$1/23 \cong 0{,}0434782\ 6086956;$$

3) o resto da divisão de 10^{14} por 23 é 12 ($10^{14} \equiv 12 \ (mod\, 23)$) e a calculadora nos diz que $12/23 \cong 0{,}5217391$.
Estes são mais 7 algarismos da expansão de $1/23$:

$$1/23 \cong 0{,}0434782\ 6086956\ 5217391;$$

Está faltando apenas um dígito, por isso vamos continuar:
4) o resto da divisão de 10^{21} por 23 é 7 ($10^{21} \equiv 7 \ (mod\, 23)$) e a calculadora nos diz que $1/23 \cong 0{,}3043478$. (Observe o período reaparecendo.)
Estes são mais 7 algarismos da expansão de $1/23$:

$$1/23 \cong 0{,}0434782\ 6086956\ 5217391\ 3043478, \text{ isto é,}$$

$$1/23 = 0{,}\overline{0434782608695652173913}$$

O prof. José Roosevelt Dias inspirou-se nas dízimas periódicas simples para as quais podemos calcular o número de algarismos do período, mas o processo por ele descrito estende-se para qualquer fração $1/n$, n inteiro, diferente de zero e baseia-se, exclusivamente, no algoritmo da divisão. O exemplo usado pelo colega foi

$$\frac{1}{59} = 0{,}016\ 949\ 152\ 542\ 372\ 881\ 355\ 932\ 203\ 389\ 830\ 508\ 474\ 576\ 271\ 186\ 440\ 677\ 966\ 1$$

Justificativa

Usaremos o próprio exemplo para justificar o processo:

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434782 + a \text{ com } 0 \leqslant a < 10^{-7} \qquad (1)$$

Vamos multiplicar a igualdade e a desigualdade por 23×10^7:

$10^7 = 434782 \times 23 + a \times 23 \times 10^7$ com $0 \leqslant a \times 23 \times 10^7 < 23$

Estas duas expressões mostram que $a \times 23 \times 10^7$ é o resto da divisão de 10^7 por 23. Este resto foi calculado: é 14.

Portanto, $a \times 23 \times 10^7 = 14$, o que nos dá:

$$a = \frac{14}{23} \times 10^{-7} = (0{,}6086956 + b) \times 10^{-7} = 6086956 \times 10^{-14} + b \times 10^{-7}$$

Substituindo em (1):

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434782\ 6086956 + b \times 10^{-7} \text{ com } 0 \leqslant b \times 10^{-7} < 10^{-14} \qquad (2)$$

Após multiplicar a igualdade e a desigualdade por 23×10^{14}, repetimos o argumento acima:

$10^{14} = 4347826086956 \times 23 + b \times 23 \times 10^7$ com $0 \leqslant b \times 23 \times 10^7 < 23$

Portanto $b \times 23 \times 10^7$ é o resto da divisão de 10^{14} por 23, isto é

$b \times 23 \times 10^7 = 12$ e $b = \dfrac{12}{23} \times 10^{-7}$

Daí $b = (0{,}5217391 + c) \times 10^{-7} = 5217391 \times 10^{-14} + c \times 10^{-7}$

Substituindo em (2):

$$\frac{1}{23} = 0{,}0434782\ 6086956\ 5217331 + c \times 10^{-14} \text{ com } 0 \leqslant c \times 10^{-14} < 10^{-21}$$

e assim por diante.

José Roosevelt Dias é mestre em Matemática pela Universidade Federal Fluminense e professor do Departamento de Geometria desta Universidade.