ORIGEM DOS NÚMEROS NEGATIVOS

O número é um conceito fundamental em Matemática que tomou forma num longo desenvolvimento histórico. A origem e formulação deste conceito ocorreu simultaneamente com o despontar, entenda-se nascimento, e desenvolvimento da Matemática. As atividades práticas do homem, por um lado, e as exigências internas da Matemática por outro determinaram o desenvolvimento do conceito de número. A necessidade de contar objetos levou ao aparecimento do conceito de número Natural.

Todas as nações que desenvolveram formas de escrita introduziram o conceito de número Natural e desenvolveram um sistema de contagem. O desenvolvimento subseqüente do conceito de número prosseguiu principalmente devido ao próprio desenvolvimento da Matemática. Os números negativos aparecem pela primeira vez na China antiga. Os chineses estavam acostumados a calcular com duas coleções de barras - vermelha para os números positivos e preta para os números negativos.No entanto, não aceitavam a ideia de um número negativo poder ser solução de uma equação. Os Matemáticos indianos descobriram os números negativos quando tentavam formular um algoritmo para a resolução de equações quadráticas. São exemplo disso as contribuições de Brahomagupta, pois a aritmética sistematizada dos números negativos encontra-se pela primeira vez na sua obra. As regras sobre grandezas eram já conhecidas através dos teoremas gregos sobre subtracção, como por exemplo $(a - b)(c - d) = ac + bd - ad - bc$, mas os hindus converteram-nas em regras numéricas sobre números negativos e positivos.

Diofanto (Séc. III) operou facilmente com os números negativos. Eles apareciam constantemente em cálculos intermédios em muitos problemas do seu "Aritmetika", no entanto havia certos problemas para o qual as soluções eram valores inteiros negativos como por exemplo:

$$4 = 4x + 20 \quad e \quad 3x - 18 = 5x^2$$

Nestas situações Diofanto limitava-se a classificar o problema de absurdo. Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles consideravam-nos falsos ou impossíveis. Exemplo deste facto seria Michael Stifel (1487- 1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurdi". Cardano usou os números negativos embora chamando-os de "numeri ficti". A situação mudou a partir do (Séc.XVIII) quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

Demonstração da regra dos sinais (segundo Euler)

Euler, um virtuoso do cálculo como se constata nos seus artigos científicos pela maneira audaz como manejava os números relativos e sem levantar questões quanto à legitimidade das suas construções forneceu uma explicação ou justificação para a regra os sinais. Consideremos os seus argumentos:

1- A multiplicação de uma dívida por um número positivo não oferece dificuldade, pois 3 dívidas de a escudos é uma dívida de 3a escudos, logo (b).(-a) = -ab.

2- Por comutatividade, Euler deduziu que (-a).(b) = -ab
Destes dois argumentos conclui que o produto de uma quantidade positiva por uma quantidade negativa e vice-versa é uma quantidade negativa.

3- Resta determinar qual o produto de (-a) por (-b). É evidente diz Euler que o valor absoluto é ab. É pois então necessário decidir-se entre ab ou -ab. Mas como (-a) ´ b é -ab, só resta como única possibilidade que (-a).(-b) = +ab.

É claro que este tipo de argumentação vem demonstrar que qualquer "espírito" mais zeloso, como Stendhal, não pode ficar satisfeito, pois principalmente o terceiro argumento de Euler não consegue provar ou mesmo justificar coerentemente que - por - = +. No fundo, este tipo de argumentação denota que Euler não tinha ainda conhecimentos suficientes para justificar estes resultados aceitalvelmente. Na mesma obra de Euler podemos verificar que ele entende os números negativos como sendo apenas uma quantidade que se pode representar por uma letra precedida do sinal - (menos). Euler não compreende ainda que os números negativos são quantidades menores que zero.

Texto extraído do site Só Matemática.
http://www.somatematica.com.br/negativos.php

Prova:
Partimos do primeiro membro da igualdade e aplica-se o axioma A3.
$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x$
Usando-se a distributividade, axioma D, obtemos:
$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$
Tendo já sido demonstrado que o elemento neutro 0 é o único elemento x em ← que satisfaz a propriedade $x + x = x$, conclui-se da igualdade anterior que $0 \cdot x = 0$.
Teorema 5: O simétrico do simétrico de x é x, isto é, $-(-x) = x$.
Prova:
Dado $x \in \mathfrak{R}$ temos $x + (-x) = 0$. Pela comutatividade temos $(-x) + x = 0$, isto é, x é o elemento simétrico de -x (único pelo Teorema 2). Logo $-(-x) = x$.

Teorema 6: a) "Menos vezes mais dá menos", isto é, $(-x) \cdot y = - x \cdot y$. e b) "Mais vezes menos dá menos“, isto é, $x \cdot (-y) = - x \cdot y$.
Prova:
a) $x \cdot y + (-x) \cdot y = [x + (-x)] \cdot y = 0 \cdot y = 0$. O que mostra que $- x \cdot y = (-x) \cdot y$ (Pelo axioma A4).
Analogamente mostra-se que $- x \cdot y = x \cdot (-y)$
Teorema 7: "Menos vezes menos dá mais“, isto é, $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
Prova:

$$(-x) \cdot (-y) = - [x \cdot (-y)] = - (-x \cdot y) = x \cdot y$$

As regras na multiplicação de números relativos (por exemplo, a situação $-1\times-1= 1$) foram
durante muitos séculos incompreendidas. É somente em 1867 que H. Hankel dá a resposta
definitiva para a questão com o seguinte resultado: a única multiplicação nos reais que prolonga a
multiplicação usual sobre R_+, respeitando as distributividades à esquerda e à direita, é aquela que
obedece as regras usuais dos sinais. Quer dizer, para manter tais propriedades com os reais nãopositivos
devemos definir as regras dos sinais da maneira como fazemos na escola, quando abordamos os números relativos.
Portanto, essas regras são artificias, pura invenção da mente humana e não encontram nenhuma referência concreta na natureza. O teorema acima faz cair por terra a idéia da existência
de um bom modelo de explicação. Por exemplo, o modelo comercial de ganho e perda é um
obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas. Neste modelo, o aluno se convence
facilmente, na situação, $-3 + 4 = +1$, associando -3 a uma dívida e +4 a um ganho, mas

dificilmente será convencido do mesmo em $-4 \times -2 = +8$. Além disso, esta associação da operação "+" ao verbo ganhar (adquirir, ter a mais, etc) e à operação "-" ao verbo perder (endividar, desaparecer, carregar, levar, gastar, etc), poderá acarretar dificuldades na resolução de certos tipos de problemas em aritmética, como por exemplo, o seguinte: "Luiz foi ao mercado, com uma certa quantidade de reais, para comprar balas. Gastou R$ 3,00 e ainda saiu com R$ 5,00. Quantos reais tinha Luiz antes de entrar no mercado ?" O termo gastou pode induzir diretamente à operação de subtração, equivocada para a solução deste problema.

As regras da multiplicação colocam o professor frente a tipo de dilema: ele está diante de uma convenção estabelecida cuja explicação (o teorema Hankel citado acima) ultrapassa a capacidade de compreensão do aluno na escola fundamental. Além disso, as explicações alternativas encontradas em manuais escolares criam problemas que podem ser duradouros para o aluno. O que fazer?

Antes de dar uma resposta, vamos reexaminar com mais cuidado o significado deste teorema. Consideremos as regras da multiplicação definidas em cada uma das tabelas seguintes (não são as únicas) e aplicadas aos exemplos $-1\times(-3 + 2)$ e $(-3 + 2) \times -1$.

Regras Usuais Regras 2 Regras 3

× + - × + - × + -

\+ + - + + + + + -

\- - + - - + - - -

Para o exemplo $-1\times(-3 + 2)$

Com as regras usuais, temos:

- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = 3 - 2 = 1$

Usando as regras 2:

- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = 3 - 2 = 1$

Usando as regras 3:

- eliminando os parênteses: $-1\times(-3 + 2) = -1\times-1 = -1$
- usando a distributividade à direita: $-1\times(-3 + 2) = (-1\times-3) + (-1\times 2) = - 3 - 2 = -5$

Com as regras 3 aplicadas ao mesmo exemplo, obtêm-se os resultados distintos –1 e –5, conforme o modo de calcular. Com as regras usuais e com as regras 2, o resultado obtido é o mesmo 1. Testemos, novamente estas duas últimas regras para o exemplo $(-3 + 2) \times -1$.

Com as regras usuais, temos:

- eliminando os parênteses: $(-3 + 2) \times -1 = -1\times-1 = 1$
- usando a distributividade à esquerda: $(-3 + 2) \times -1 = (-3\times-1) + (2\times -1) = 3 - 2 = 1$

Com as regras 2:

- eliminando os parênteses: $(-3 + 2) \times -1 = -1 \times -1 = 1$

- usando a distributividade à esquerda: $(-3 + 2) \times -1 = (-3\times-1) + (2 \times -1) = 3 + 2 = 5$
Estes exemplos mostram-nos que as regras que preservaram a distributividade tanto à direita quanto à esquerda, foram as usuais. Dentre as várias tabelas de multiplicação possíveis
(acima apresentamos apenas três), devemos escolher somente uma delas. É possível mostrar
(Teorema de Hankel) que as únicas regras que preservam a distributividade tanto à direita quanto
à esquerda são as usuais e, por isso, a escolha recaiu por conveniência sobre estas.
O momento é oportuno para se abrir uma discussão com os alunos sobre o papel das convenções na matemática e nas nossas vidas de uma maneira geral, como por exemplo, as
convenções e regras (leis) que disciplinam o trânsito nas ruas.
Em matemática, as regras de sinais são uma delas. Podemos citar outras, como a hierarquia nas
operações básicas. O resultado de $2+3 \times 4$ é 14 e não 20, por causa de uma convenção: a multiplicação (ou divisão) tem preferência sobre a adição (ou subtração). Poderia ser diferente,
mas, uma vez estabelecida, ela é adotada por todos. Convencionou-se, também, que a quebra da
hierarquia pode ser feita com a inclusão de parênteses. Assim, obteremos 20 da maneira seguinte:
$(2+3) \times 4$.
A explicação do porquê das regras de sinais está no teorema de Hankel. Cabe ao professor
fazer com que os alunos possam compreendê-la sem recorrer a artifícios estranhos à matemática
que podem se tornar problemáticos mais adiante.
Acredito que as explicações dadas, através dos exemplos acima, sejam suficientes e

apontem um bom caminho à compreensão dos alunos.