HISTÓRIA DOS NÚMEROS

O número é um conceito fundamental em matemática que foi construído numa longa história. Existem evidências arqueológicas de que o homem, já há 50.000 anos, era capaz de contar.

O número e a matemática nasceram e se desenvolveram juntos e tanto as atividades práticas do homem e das sociedades quanto aquelas intrínsecas à matemática, como ciência, foram determinantes na evolução deste conceito.

A necessidade de contar objetos deu origem ao número natural e todas as civilizações que criaram alguma forma de linguagem escrita desenvolveram símbolos para o número natural e operaram com eles.

Num primeiro estágio, não havia o conceito de número. Número era um nome: palavras diferentes referiam-se a “três pedras” ou “três homens”. Num estágio mais avançado, os números foram separados dos objetos e se tornaram entes abstratos. Foram criados então os sistemas numéricos.

O que é um “sistema numérico”?

Quando se tornou necessário efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Cada civilização desenvolveu o seu sistema de numeração, um sistema numérico. De um modo geral, isto foi feito dispondo os números em grupos convenientes, sendo a ordem de grandeza destes grupos determinada pelo processo de correspondência empregado. O método consistia em escolher um certo número, N, como base e atribuir nomes aos números 1,2...N. para os números maiores do que N os nomes são combinações dos nomes já escolhidos.

No antigo Egito havia diferentes sistemas numéricos, entre eles um sistema de bases 10[1]. Na Babilônia desenvolveu-se o sistema sexagesimal, com base 60, e o princípio posicional de representação; na Grécia antiga era usado um sistema de representação alfabético; na Índia utilizavam um sistema decimal muito bem desenvolvido, com representações para o zero e outros dígitos.

O que é "sistema numérico decimal"?

O **sistema decimal** é um sistema de numeração de posição que utiliza a base dez. Os dez algarismos indo-arábicos : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 servem para contar unidades, dezenas, centenas, etc. da direita para a esquerda. Cada algarismo tem um valor diferente segundo sua posição no número: assim, em **111**, o primeiro algarismo significa 100, o segundo algarismo 10 e o terceiro 1.

[1] Se você quer saber mais sobre este assunto: http://www.matematica.br/historia/numeracao.html

No sistema decimal[2], o símbolo 0 (zero) posicionado à esquerda do número escrito não altera seu valor representativo. Assim: 1; 01; 001 ou 0001 representam a mesma grandeza, neste caso a unidade. O símbolo zero posto à direita implica em multiplicar a grandeza pela base, ou seja, por 10 (dez): 1, 10, 100, 1000, etc.

A imensa quantidade de objetos a serem contados, as atividades práticas e o espírito indagador do homem determinaram a noção de conjunto numérico sem limites: a seqüência dos naturais passou a ser considerada como não limitada superiormente.

Para as medidas, o número racional se tornou uma necessidade. As frações foram desenvolvidas no Egito – frações com numerador 1, como 1/7 - e na Babilônia – frações com base 60. Este sistema era muito usado e chegou até nós, no mundo ocidental, na forma das unidades para medir tempo e ângulos. As frações decimais foram introduzidas, na Ásia, no século XV, e alcançaram a Europa no século seguinte.

A evolução dos números a partir da Álgebra

O posterior desenvolvimento do conceito de número deu-se principalmente devido ás demandas intrínsecas à matemática e vinculadas à resolução de equações. Os números negativos apareceram, primeiramente, na China antiga, na tentativa de formular um algoritmo para resolução de equações de segundo grau. O matemático grego Diofanto operava com

[2] Se você quiser saber mais sobre este assunto: http://pt.wikipedia.org/wiki/Nota%C3%A7%C3%A3o_posicional

números negativos, no século III. Em atividades práticas, eram usados com significado de dívida ou débito. Entretanto, até o século XVI, na Europa, os matemáticos negavam a existência destes números. Esta situação mudou quando, no século XVII, foi criada uma representação geométrica, uma reta numerada e orientada, contendo números positivos e negativos, na qual números negativos eram identificados com segmentos com sentido oposto à orientação natural da reta.

Na Babilônia era utilizado um algoritmo para calcular raízes quadradas. Os gregos antigos descobriram que o lado e a diagonal de um quadrado são segmentos incomensuráveis. Eles não criaram novos números (os irracionais), mas, sim, uma teoria para lidar com razões entre segmentos, independente do conceito de número. [3]

O desenvolvimento da álgebra e das técnicas de cálculo aproximado, em conexão com as demandas da astronomia, levaram os árabes a estender o conceito de número. Eles passaram a considerar razões entre quantidades arbitrárias, comensuráveis ou não, como número. No século XIII, foi definido: qualquer razão pode ser chamada de número, precisamente igual a 1 quando os termos da razão coincidem.

No século XVIII, Newton reconheceu os números em três formas: inteiros, frações e irracionais. A respeito dos negativos e positivos, Newton definiu positivo como sendo maior do que nada e negativo como sendo menor do que nada

Os números imaginários apareceram no século XVI, junto com a solução do problema: $x + y = 10$ e $xy = 40$. Matemáticos referiram-se a uma raiz quadrada de um número negativo como puramente negativo. Mais tarde, ainda no século XVI, foi criado o termo número imaginário e uma aritmética para eles. Nos séculos XVII e XVIII, muitos resultados foram provados, mas somente a interpretação geométrica de um número complexo como um ponto do plano, no início do século XIX, completou a teoria.

---

[3] Se você quiser saber mais sobre este assunto: http://www.ppgect.ufsc.br/dis/03/Dissert.pdf (pag.23-31)

Até o século XIX, os números naturais eram vistos como coleções de unidades; frações eram razões entre quantidades; números reais eram comprimentos de segmentos e números complexos eram pontos do plano. Mas os matemáticos não estavam satisfeitos com os resultados baseados nestas noções intuitivas. Era preciso construir uma teoria dos números. Nessa perspectiva, foi formulado um princípio geral para direcionar qualquer generalização do conceito de número: *o principio da permanência* das leis do cálculo. Para construir um novo sistema numérico, como extensão de um sistema dado, as operações devem ser definidas de tal modo que as leis existentes permaneçam.

Durante o século XIX e século XX, muitas mudanças foram desenvolvidas na matemática. Concepções sobre objetos e objetivos da matemática mudaram. O método axiomático de construção com base na teoria dos conjuntos tomou forma e, nesta perspectiva, definiu-se formalmente um conjunto numérico (também denominado sistema numérico): um conjunto com certas relações e certas operações, que satisfazem alguns axiomas previamente definidos.

Por exemplo, o sistema numérico dos números naturais **N** é um sistema com duas operações, adição (+) e multiplicação (.) e com um elemento básico que é a unidade (1), que satisfaz os seguintes axiomas:

1) Para cada elemento n de **N**, $n+1 \neq n$;
2) As duas operações são associativas e comutativas;
3) A multiplicação é distributiva com relação à adição;
4) Se M é um subconjunto de **N q**ue contém o número 1 e se para todo elemento n, também contém n+1, então M = **N**. Este é o chamado axioma da indução.

A partir da definição axiomática do sistema dos números naturais, foi construída a teoria dos inteiros, como pares de números naturais (cuja diferença m-n vai resultar num número inteiro positivo ou negativo); a teoria dos números racionais como pares de números inteiros (cujo quociente m:n vai resultar num número racional); e a teoria dos números reais como seqüências de racionais (cujo limite vai resultar num número real).

O conjunto **Z** dos inteiros estende (N, +, .), completando a operação de subtração. O conjunto dos racionais **Q** estende **Z**, completando a operação de divisão. O conjunto dos complexos **C** estende o corpo dos reais **R**, dando solução à equação $x^2 + 1 = 0$.

O sistema dos números reais **R** é o corpo que estende e completa o corpo dos racionais. O axioma da completude diz que: toda seqüência limitada de números reais converge para um número real.

Por exemplo, uma seqüência de números cujo quadrado se aproxima de 2: (1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414212; ...) é convergente para o número real $\sqrt{2}$.

Estas novas definições correspondem a uma teoria algébrica dos números, conclusão de uma história milenar, que só adquiriu sua forma matemática final, recentemente, nos séculos XIX e XX.

A evolução dos números a partir da Geometria

No tempo de Pitágoras[4], o sistema numérico tinha se desenvolvido até aquilo que chamamos o conjunto dos números racionais, quando foi feita uma descoberta espantosa: investigando o suporte lógico da geometria conhecida, descobriu-se a existência de segmentos cuja medida não é um número racional.

Os pitagóricos, discípulos de Pitágoras, conseguiram provar que certos segmentos, obtidos através de construções simples, têm comprimentos cuja medida não é um número racional, sendo que o mais famoso deles é a diagonal do quadrado cujo lado mede 1. Foi provado que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis, isto é, não existe uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes na diagonal e no lado do quadrado, simultaneamente. Conseqüência disto, o quociente da medida "d" da diagonal pelo lado "ℓ" (d/ℓ) do quadrado não pode ser expresso como um racional "m/n". Em particular, se o lado " ℓ" é considerado unitário então o número correspondente à medida da diagonal não é racional.

No entanto, os números irracionais enfrentaram várias barreiras até serem aceitos. Para os gregos, tudo era número, e toda realidade física poderia ser expressa e compreendida com os números inteiros, além disso, a existência dos irracionais contrariava o senso comum de que toda grandeza poderia ser expressa por algum número racional. Geometricamente, ninguém duvidava de que dados dois segmentos de reta sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, por menor que fosse, que coubesse um número inteiro de vezes em cada um dos dois segmentos dados.

Para os gregos, a semi-reta era uma metáfora para os números, associados com pontos. Nessa perspectiva, fixando um ponto O de origem, na reta, e determinando um sentido para efetuar medidas, cada ponto A é identificado com a extremidade de um segmento AO e associado ao número

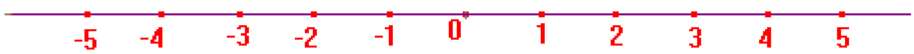
---

[4] Se você quer saber mais sobre este assunto: http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/pitagoras.html

que corresponde à medida deste segmento. Por muitos séculos, acreditou-se que este número é sempre racional.

No século XVII, com o trabalho de Descartes, em Geometria Analítica, a reta passou a ser dividida em duas semi-retas e, por convenção, a semi-reta à direita do zero passou a ser o lugar dos números positivos; a semi-reta à esquerda foi construída por simetria, passando a conter número negativos, os opostos dos positivos. Estes números passaram a ser identificados por sinais: à direita, números positivos, (+x), que coincidem com os racionais (x) conhecidos até aí, (+x) = x. À esquerda, números negativos, identificados com o sinal (-x). Estes números foram definidos como sendo os opostos aditivos, também denominados de simétricos, dos racionais positivos:

$(+x) + (-x) = x - x = 0.$



Por muito tempo, a reta foi a metáfora considerada ideal para o corpo dos racionais. Acreditava-se que os racionais completavam a reta e que existia uma correspondência biunívoca: ponto – número racional; número racional – ponto. Como a reta é o modelo prototípico da continuidade (um conjunto contínuo de pontos), parecia que o conjunto dos racionais era contínuo e completo na reta.

Somente no século XIX, esta idéia definitivamente foi negada. O matemático alemão Richard Dedekind[5] escreveu uma obra intitulada Continuidade e Números Irracionais, na qual menciona que a linha reta é infinitamente mais rica em pontos do que o domínio dos números racionais o é em números. Isto exigia a criação de novos números, para obter um domínio

[5] Se você quer saber mais sobre este assunto: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/novadef.htm

numérico completo e com a mesma continuidade que a linha reta. A reta passou a ser denomina reta real.

Diferentes matemáticos, nesta época, dedicaram-se a construção dos números reais. Finalmente, temos hoje a definição de **R** como um corpo ordenado completo.

Definição de $\mathbb{R}$

"**R** é corpo porque estão definidas as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, com todas as suas propriedades. É um corpo ordenado por que existe a relação x < y, que está interligada com a adição e a multiplicação. E, finalmente, é completo, pois está em relação bijetiva com a reta real. É a completude de **R** que garante a existência de $\sqrt[n]{a}$ e, mais geralmente, de a^x para todo a > 0 e todo x ∈ **R**." (Lima, 2006, p. 58)

No que consiste a opção pela abordagem histórica?

No nosso trabalho, nesta disciplina Sistemas Numéricos, optamos por seguir a perspectiva histórica das construções numéricas.

Os números, na sua origem, estão relacionados com contagem e medida,e, portanto, sempre com números não negativos.

Por esta razão, neste curso, as expressões "inteiros", "racionais" e "reais" são utilizadas, inicialmente, sem que os números negativos tenham sido definidos. Mais tarde, quando esta definição for feita, é criado o conjunto dos "reais relativos". A partir daí podemos usar nossa terminologia usual, suprimindo o termo "relativos" e adotando os conjuntos dos números inteiros, racionais e reais com os negativos.

O conjunto de partida é o dos **números naturais (N)**. Este conjunto não contém o elemento neutro da adição, o zero, portanto o primeiro passo é criar o **conjunto dos inteiros Z+** = {0,1,2,3,...} (utilizamos o símbolo + para lembrar que estamos tratado com números maiores ou iguais a zero).

Os inteiros revelam-se insuficientes para expressarem medidas de segmentos menores do que a unidade: a dificuldade reside na divisão m:n de números inteiros que não resulta número inteiro. Cria-se o conjunto dos **números racionais, Q+.**

O campo dos racionais revela-se insuficiente para expressar medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade, como é o caso da diagonal do quadrado. Cria-se o conjunto dos **números reais R+**.

O conjunto dos reais é insuficiente para representar grandezas que são suscetíveis de ser tomadas em dois sentidos opostos, pois números da forma $m - n$, com $m < n$, m, n reais, não foram definidos. Cria-se o conjunto dos **números reais relativos R.** Deste momento, em diante podemos considerar o corpo dos números reais **R**, incluindo os positivos e negativos.

Continuando, o conjunto dos números reais mostra-se insuficiente para representar raízes de equações polinomiais simples, tais como $x^2 + 1 = 0$, sendo x um número real qualquer, pois não existe a raiz quadrada de (- 1). Cria-se o conjunto dos **números complexos C**, incluindo um novo número, o número imaginário i, que representa a raiz quadrada de (-1).

Cada novo campo tem suas propriedades, que são definidas segundo o princípio da permanência: analogia de definições com aquelas do conjunto conhecido e manutenção das operações formais e das propriedades já existentes.

GLOSSÁRIO

Corpo

Medida

Método axiomático, axioma

Princípio da permanencia

Segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Sistema decimal

Sistema sexagesimal

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998, páginas 35 a 45, trecho do capítulo 2:1 – A construção do campo racional.

CERRI, Cristina. **Desvendando os Números Reais**. IME-USP. Novembro de 2006. Disponível em: www.mat.ufg.br/bienal/**2006**/mini/**cristina.cerri**.pdf

Encyclopaedia of Mathematics, **Numbers.** Springer Online, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002. Disponível em: http://eom.springer.de/n/n067900.htm

EVES, Howard. Introdução à história da Matemática. Campinas,SP: UNICAMP, 1995.

FACULDADE DE CIÊNCIAS. UNIVERSIDADE DE LISBOA. **Irracionais.** Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/novadef.htm

LIMA, Elon Lages, CARVALHO, Paulo César Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**.Coleção do Professor de Matemática. Vol. 1. Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

USP, Instituto de Matemática e Estatística. **Matemática Interativa na Internet**. http://www.matematica.br/historia/index_h_tempo.html