OPERAÇÕES COM NÚMEROS DECIMAIS EXATOS

Os números decimais exatos correspondem a frações decimais.

Por exemplo, o número 1,27 corresponde à fração127/100.

$$\frac{127}{100} = 1{,}27$$

onde 1 representa a parte inteira e 27 representa a parte decimal. Esta notação subentende que a fração 127/100 pode ser decomposta na seguinte forma:

$$\frac{127}{100} = \frac{100+27}{100} = \frac{100}{100} + \frac{27}{100} = 1+0{,}27 = 1{,}27$$

Em particular, os inteiros são números decimais:

$$1 = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = \ldots = 1{,}0 = 1{,}00 = 1{,}000\ldots$$

Nesta perspectiva, as operações com decimais exatos reduzem-se a operações com frações decimais.

Adição de números decimais exatos

Ao adicionar números decimais exatos, estamos adicionando as frações decimais que os representam. O resultado é um número decimal exato.

Por exemplo:

$$12 + 3{,}54 = \frac{12}{1} + \frac{354}{100}$$

Mas, para adicionar frações, é preciso reduzi-las a frações equivalentes com mesmo denominador. A soma será uma fração decimal, que por sua vez pode ser representada por numero decimal:

$12 + 3{,}54 = \frac{12}{1} + \frac{354}{100} = \frac{1200}{100} + \frac{354}{100} = \frac{1554}{100} = 15{,}54$

Outro modo de ver:

$12 + 3{,}54 = \frac{1}{100}\,(\,1200 + 354) = \frac{1554}{100}$

Sabemos operar com inteiros, com o algoritmo das colunas.

Escrevemos os números observando, fazendo as colunas coincidirem: unidades com unidades, dezenas com dezenas , centenas com centenas, etc.

1200

354

1554

Ao operar 12 + 3,54, obedecemos à mesma regra, colocando a vírgula separando a unidade do décimo, fazendo coincidir: décimo com décimo, centésimo com centésimo, milésimo com milésimo, etc.

12,00

3,54

15,54

Subtração de decimais exatos

O mesmo raciocínio pode ser estendido à subtração. O resultado é um número decimal exato.

Multiplicação de decimais exatos

Analogamente, podemos multiplicar dois números decimais transformando cada um dos números decimais em frações decimais e realizar a multiplicação de numerador por numerador e denominador por denominador. O resultado é um número decimal exato.

Por exemplo:

$$2{,}25 \times 3{,}5 = \frac{225}{100} \times \frac{35}{10} = \frac{225 \times 35}{100 \times 10} = \frac{7875}{1000} = 7{,}875$$

Podemos também multiplicar os números decimais como se fossem inteiros, encontrar o produto, voltar a escrevê-lo como fração decimal e logo após em número decimal.

Fazemos isto utilizando o algoritmo da multiplicação de inteiros.

O algoritmo da multiplicação por inteiros é justificado com a aplicação das propriedades associativa e comutativa da adição e a distributiva da multiplicação com relação à adição:

$225 \times 35 = 225 \text{ x } (3.10 + 5) =$
$(225 \text{ x } 3 \text{ x } 10) + (225 \text{ x } 5) =$
$(225\text{x}5) + (225 \text{ x } 30) =$
$1125 + 6570 = 7875$

$$\begin{array}{rl} 225 & \\ \text{X } 35 & \\ \hline 1125 & = 225 \text{ x } 5 \\ 6570 & = 225 \text{ x } 30 \\ \hline 7875 & = 225 \text{ x } 35 \end{array}$$

$$\frac{7875}{1000} = 7{,}875$$

Para evitar esta posterior divisão por 1000, costuma-se contar e somar o número de casas decimais de cada fator, colocando-se a vírgula no lugar correspondente: 3 casas implica que a virgula vai separar 3 dígitos.

Divisão de números decimais exatos

Esta operação é a mais difícil de justificar, pois ainda não sabemos dividir números inteiros cujo quociente não é inteiro. Nem sempre o resultado da divisão de dois números decimais exatos é exato. Vamos mostrar que pode-se obter como quociente um número decimal infinito periódico.

Caso 1:

$\frac{m}{n}$ ***m* e *n* inteiros e *m* múltiplo de *n***

Considerando que os inteiros são números decimais, sabemos calcular:

$$\frac{36}{4} = 9$$

Mas não sabemos, ainda, calcular, em números decimais, divisões cujo quociente não é inteiro:

$$\frac{36}{5} = ?$$

$$\frac{36}{7} = ?$$

Caso 2:

$\frac{m}{n}$ *m* e *n* decimais inteiros, *m* não é múltiplo de *n*, mas *n* é divisor de alguma potência de 10

Neste caso, a divisão pode ser solucionada com auxílio das frações decimais e da adição com números decimais.

Exemplos:

$3 : 2 = \frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{10} = 1{,}5$

$1 : 250 = \frac{1}{250} = \frac{4}{1000} = 0{,}004$

Caso 3:

$\frac{m}{n}$ *m* e *n* decimais inteiros, *m* não é múltiplo de *n* e não é divisor de qualquer potência de 10

Neste caso, não é possível transformar a fração resultante da divisão em fração decimal.

Como fazer?

Exemplo:

$7 = \frac{1}{7}$

Neste caso, adotamos sucessivas multiplicações por 10, buscando expressar esta fração como uma soma de potências de 1/10, para ao final obter um número decimal. Salientamos em azul, a primeira divisão que gera um número inteiro não nulo mais um resto: $\frac{10}{7}$. Salientamos em amarelo a coleção de restos que gera uma coleção de divisões.

$1 : 7 = \frac{1}{7} = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{3}{7}\right) = \frac{1}{10} + \frac{3}{70}$

$\frac{3}{70} = \frac{1}{100}\left(\frac{30}{7}\right) = \frac{1}{100}\left(4 + \frac{2}{7}\right) = \frac{4}{100} + \frac{2}{700}$

$\frac{2}{700} = \frac{1}{1000}\left(\frac{20}{7}\right) = \frac{1}{1000}\left(2 + \frac{6}{7}\right) = \frac{2}{1000} + \frac{6}{7000}$

$$\frac{6}{7000} = \frac{1}{10.000}\left(\frac{60}{7}\right) = \frac{1}{10.000}\left(8 + \frac{4}{7}\right) = \frac{8}{10.000} + \frac{4}{70.000}$$

Até este momento, na divisão, obtemos o seguinte:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10.000} + \frac{4}{7000.000} = 0{,}1428 + \frac{4}{70.000}$$

Observe que temos uma coleção de restos das divisões:

3, 2, 6, 4...

A pergunta é:

se continuarmos neste processo, em algum momento o resto vai se repetir, de tal modo que a coleção de dígitos que forma o quociente na sua forma decimal, também comece a se repetir?

A resposta é sim: a coleção de restos só pode percorrer os valores 1,2,3,4,5,6. Não existe resto igual a 7 ou maior do que 7, quando dividimos por 7.

Vamos completar os cálculos para exemplificar o que queremos dizer:

$$\frac{4}{70.000} = \frac{1}{100.000}\left(\frac{40}{7}\right) = \frac{1}{100.000}\left(5 + \frac{5}{7}\right) = \frac{5}{100.000} + \frac{5}{700.000}$$

$$\frac{5}{700.000} = \frac{1}{1.000.000}\left(\frac{50}{7}\right) = \frac{1}{1.000.000}\left(7 + \frac{1}{7}\right) = \frac{7}{1.000.000} + \frac{1}{7.000.000}$$

$$\frac{1}{7.000.000} = \frac{1}{10.000.000}\left(\frac{10}{7}\right) = \frac{1}{10.000.000}\left(1 + \frac{3}{7}\right) = \frac{1}{10.000.000} + \frac{3}{70.000.000}$$

Alguma coisa está acontecendo. Encontramos novamente o quociente (10/7).

Vamos voltar a procurar o resultado da divisão como soma de potências de 1/10:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10.000} + \frac{5}{100.000} + \frac{7}{1.000.000} + \frac{1}{10.000.000} + \frac{3}{70.000.000}$$

$= 0{,}1428571....$

O primeiro dígito (1) corresponde à primeira divisão (10/7) e o último que foi computado, também corresponde à divisão (10/7).

Quais são os dígitos que seguem o último, completando os pontinhos?

A coleção de dígitos que forma o quociente, se repetirá:

0,1428571428571428571....

Forma-se um período de 6 dígitos: 142857.

Os restos também se repetem: 3, 2, 6, 4,5,1.

Observe que obtivemos 6 valores diferentes para o resto, de 1 a 6. Impossível encontrar mais do que isto, pois o divisor é 7.

Algoritmo da divisão

A técnica de divisão aplicada acima justifica o conhecido "algoritmo da chave":

1 | 7

1 0 0, 1 4 2 8 5 7 1 4 2 8 5 7 1....... ⇨ (10/7) dá 1, resta 3

Resto 3 30 ⇨ (30/7) dá 4, resta 2

Resto 2 20 ⇨ (20/7) dá 2, resta 6

Resto 6 60 ⇨ (60/7) dá 8, resta 4

Resto 4 40 ⇨ (40/7) dá 5, resta 5

Resto 5 50 ⇨ (50/7) dá 7, resta 1

Resto 1 10 ⇨ (10/7) dá 1, resta 3 INICIA A REPETIÇÃO

Resto 3 30

20

60

40

50

10

Esta técnica pode ser estendida para quaisquer outros pares de números, inteiros ou decimais.

Exemplo:

$10 : 16 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} = \frac{5.125}{1.000} = \frac{625}{1.000} = 0{,}625$

OU

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{10}\left(\frac{50}{8}\right) = \frac{1}{10}\left(6 + \frac{2}{8}\right) = \frac{1}{10}\left(6 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{10}(6{,}25) = 0{,}625$$

Caso 4:

A divisão envolve dois decimais

Se os números estiverem em forma decimal, estendemos a definição de fração para estes números e transformamos a fração resultante numa fração equivalente com inteiros.

Exemplos:

$$3{,}6 \div 0{,}4 = \frac{3{,}6}{0{,}4} = \frac{36 \times 10}{4 \times 10} = \frac{36}{4} = 9$$

$$0{,}35 \div 7 = \frac{0{,}35}{7} = \frac{0{,}35 \times 100}{7 \times 100} = \frac{35}{700} = \frac{35 \div 7}{700 \div 7} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$$0{,}57 \div 1{,}234 = \frac{0{,}57}{1{,}234} = \frac{0{,}57\ x\ 1.000}{1{,}234\ x\ 1.000} = \frac{570}{1234}$$

Como visto anteriormente, se multiplicarmos tanto o dividendo como o divisor pelo mesmo número (no caso, por 10, 100 ou 1000) o quociente não se alterará. Utilizando essas informações poderemos efetuar divisões entre números decimais como se fossem divisões de números inteiros.

Relação de ordem

A comparação de números decimais pode ser feita analisando-se as partes inteiras e decimais desses números.

Caso 1:

Números com partes inteiras diferentes

O maior número é aquele que tem a parte inteira maior.

Exemplos:

(a) 4,1 > 2,76, pois 4 é maior do que 2.

(b) 3,7 < 5,4, pois 3 é menor do que 5.

Caso 2:

Números com partes inteiras iguais

Igualamos o número de casas decimais acrescentando zeros tantos quantos forem necessários. Após esta operação, teremos dois números com a mesma parte inteira, mas com partes decimais diferentes. Basta comparar estas partes decimais para constatar qual é o maior deles.

Exemplos:

(a) 12,4 > 12,31 pois 12,4=12,40 e 40 > 31.

(b) 8,032 < 8,47 pois 8,47=8,470 e 032 < 470.

(c) 4,3 = 4,3   pois 4=4 e 3=3.

BIBLIOGRAFIA

Ensino Fundamental: Frações e Números Decimais. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fracoes/fracdec.htm