

# As concepções de números fracionários<sup>1</sup>

Prof. Maria José Ferreira da Silva

## Significado

Em nossos encontros para a elaboração de uma seqüência de atividades que desse conta do ensino dos números fracionários, para a quinta série, o primeiro ponto importante levantado foi a necessidade de que as crianças dessem significado a esse conhecimento. Depois, vimos que tínhamos situações que envolviam interpretações diferentes na utilização dos números fracionários e que trabalhar com essas interpretações seria importante para o aprendizado da criança. A essas interpretações daremos o nome de concepções e aqui discutiremos suas características, situações em que aparecem bem como o tratamento necessário a cada uma delas. Veremos as seguintes concepções parte/todo, medida, quociente, razão e operador.

## Quantidades

Quantificar significa associar um número por meio de contagem ou medição. Vimos na parte histórica que o conjunto dos números naturais serve para quantificar quantidades discretas e o conjunto dos números reais para quantificar quantidades contínuas.

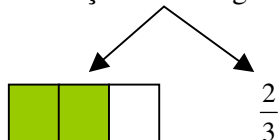
Boyer (p. 52) diz que:

*Originalmente, nos círculos pitagóricos, as grandezas eram representadas por pedrinhas, [...] mas na época de Euclides surge completa mudança de ponto de vista. As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em Os elementos os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas [...] era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos. Isso se deve, provavelmente aos paradoxos de Zeno e outros. O mais conhecido é o da corrida de Aquiles com a tartaruga. Como esta sai com vantagem Aquiles por mais depressa que corra nunca a alcançará. Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como consistindo de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade, mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como “continuidade”* Boyer p. 51.

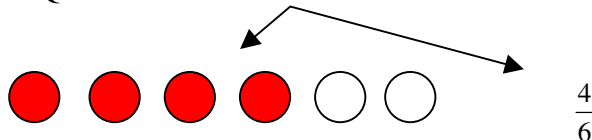
## Representações

Além, da linguagem natural que, geralmente, descreve as situações, duas representações visuais se apresentam: o símbolo  $a/b$  que representa numericamente a situação e a figura, de regiões ou conjuntos divididos em partes de mesma quantidade, que dá suporte para o entendimento ou pesquisa da solução da situação.

Dois terços do retângulo é verde



Quatro sextos das bolinhas são vermelhas



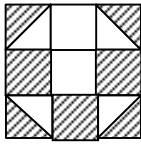
<sup>1</sup> Texto elaborado para formação continuada de professores no Projeto: O Pensamento Matemático no Ensino Fundamental coordenado pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

## Concepção Parte/todo

1) Pintar dois terços da figura abaixo.



2) Que fração da figura está pintada?



3) Pintar dois terços das bolinhas abaixo.



## Características

As situações que envolvem essa concepção evidenciam partes de alguma quantidade que é considerada como um todo ou inteiro e estão presentes em todas as discussões que envolvem o desenvolvimento do conceito de número fracionário. Esta interpretação depende da divisão de uma quantidade contínua (área, massa, tempo, ...) ou de uma quantidade discreta (coleção de objetos) em partes ou subconjuntos de mesma quantidade.

O número  $a/b$  é usado para descrever uma divisão em que o inteiro ou todo foi dividido em  $b$  partes e foram consideradas  $a$  dessas partes. A partir desse ponto de vista o número  $a$  não pode exceder o número total de parte  $b$ , fazendo com que a fração  $a/b$  seja menor ou igual a 1.

Nestas situações três pontos merecem atenção: a natureza do inteiro, como ele pode ser dividido e o que será considerado uma parte, todos levando à diferenças de tratamento.

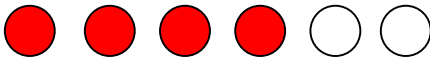
## Caso discreto

Aqui o inteiro (todo) pode ser representado por um conjunto de objetos idênticos, e neste caso, a situação parte/todo é tratada com números inteiros que representam quantidades de objetos que podem ser contados, agrupados ou distribuídos.

Assim, podemos pensar em três tipos de situações.

### a) Contagem

Que fração das bolinhas é vermelha?



Quando perguntamos que fração das bolinhas é vermelha estamos considerando o conjunto das cinco bolinhas como um inteiro e pedimos a relação entre o número de bolinhas vermelhas e o número total de bolinhas representando-a pelo número  $4/6$ . Entendemos que “quatro sextos das bolinhas são vermelhas”. Observe que para obter a resposta primeiro contamos o total de bolinhas e depois as bolinhas que são vermelhas.

### b) Agrupamento

Se Pedro tem três bolinhas de gude, João tem 4 e Marcos tem 5 bolinhas, qual a fração do total de bolinhas que cada um possui?

Nesta situação o inteiro é o grupo formado pelas bolinhas dos três meninos e as frações obtidas seriam  $\frac{3}{12}$ ,  $\frac{4}{12}$  e  $\frac{5}{12}$  que representam a relação entre a quantidade de cada um e a quantidade total de bolinhas. Para chegar à resposta foi necessário obter a soma  $3 + 4 + 5$  e relacioná-la com o número de bolinhas de cada um.

### c) distribuição

Pintar  $\frac{3}{4}$  das bolinhas abaixo.



Nesta situação o número que representa a quantidade total de bolinhas deve ser dividido em quatro partes de mesma quantidade e depois três dessas partes devem ser pintadas. Para resolver contamos o total de bolinhas e efetuamos a divisão desse número por 4 para perceber que cada parte contém 3 bolinhas. Como queremos três quartos teremos então que pintar 3 dessas partes, ou seja, 9 delas.

Na verdade as situações que envolvem a concepção parte/todo no discreto nos remetem diretamente à divisão nos naturais.

### Cabe destacar que:

Existem situações no caso discreto da concepção parte/todo em que as partições são impossíveis, por exemplo, não podemos dividir igualmente quinze bolinhas em quatro partes. Isto ocorre porque o número de bolinhas não é um múltiplo de 4. Aqui a linguagem fracionária é inadequada pois o caso é típico das divisões com resto dos naturais, pois não podemos dividir uma bolinha de gude, ou uma flor, ou um carro, ou um botão, ... caso o fizéssemos esses objetos perderiam suas características, por exemplo o botão deixaria de ser botão.

Podemos ter também situações em inadequadamente usamos a linguagem de frações para objetos diferentes, por exemplo, quando dizemos que metade dos peixinhos do aquário é vermelho. Na realidade não estamos usando frações mas sim a divisão de naturais.

### Caso contínuo

Quando apresentamos uma figura previamente dividida em partes congruentes, só precisamos contar para identificar o total de partes ou o número de partes consideradas. Na realidade estamos discretizando o contínuo para usar somente a contagem, como fizemos no caso discreto.

Um ponto a ser discutido neste caso é o que entendemos por igualdade das partes. As apresentações de figuras totalmente divididas em partes congruentes induzem ao entendimento de que a igualdade das partes implica na igualdade da forma e da área, o que não é verdade.

### Forma das partes

Como o ensino enfatiza nas situações parte/todo no contínuo a contagem das partes de figuras previamente divididas em partes congruentes não proporciona a discussão a respeito de área e forma.

Em situações de divisões não usuais, como as apresentadas abaixo, é comum a alegação da não possibilidade da identificação da fração que representa a parte pintada da figura sob o argumento de que a figura não está dividida em partes iguais.



Por outro lado, em figuras como as abaixo, pode acontecer o contrário. A contagem das partes enfatizada no ensino leva a não percepção de que as partes não são iguais, nem em forma, nem em área e a identificação da parte pintada pelas frações  $3/5$  e  $2/6$  respectivamente.

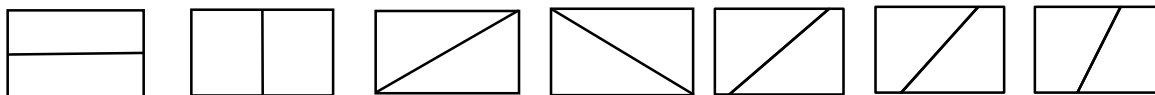


Com certeza esses tipos de erros, poderiam ser evitados se o enfoque para a concepção parte/todo no contínuo, não se resumisse à contagem das partes de figuras já divididas, mas sim na relação entre áreas, a partir de tarefas que solicitassem a divisão de figuras. Além disso, essas tarefas conduziram naturalmente à percepção da equivalência tanto de áreas, quanto das frações menores que 1 que as representam.

### Divisão do inteiro

Se tomarmos um retângulo para dividir em duas partes congruentes, por exemplo, existem várias possibilidades para essa divisão.

Podemos fazê-lo por um único traço.



Ou por mais traços ou curvas.

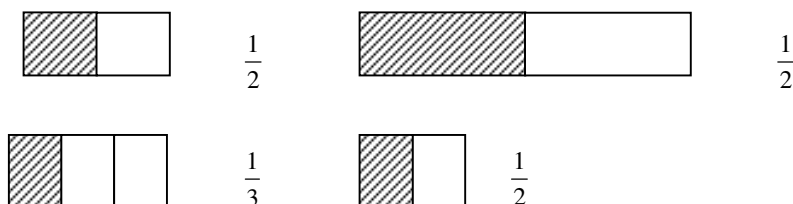


É necessário um planejamento para decidir como dividir e desenhar os traços.

Normalmente, utiliza-se o círculo para representar as frações, inclusive existem muitos materiais que usam essa forma para o ensino. No entanto, dividir um círculo em partes iguais não é tarefa simples, pois exige a identificação de seu centro e algumas técnicas de desenho geométrico para decidir onde desenhar as linhas.

### Cabe destacar que:

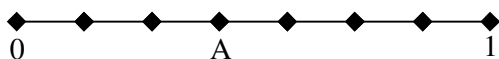
Em muitos casos, o aluno, ao observar as divisões e utilizar a contagem para identificação de partes perde a referência do inteiro, principalmente em situações de comparação. Observe que, na primeira figura abaixo, embora o número que represente a parte pintada da figura seja o mesmo, a área que ele representa não é a mesma, porque os inteiros são diferentes. E na segunda figura, acontece o contrário, a área considerada é a mesma, mas a fração que as representam são diferentes pois os inteiros também são diferentes.



É freqüente aparecer em livros didáticos a divisão de uma fruta, um pão, um bolo,... em “partes iguais”. Esse enfoque não considera a igualdade das partes, essencial no modelo contínuo, mas sim uma divisão visual, supostamente de “mesma área”. Por exemplo, no caso de um bolo, a igualdade não pode ser a “área” de cada pedaço, mas sim a quantidade de bolo que tem em cada pedaço que só poderia ser determinada pelo seu “peso” (massa). É o caso também da pizza, exemplo clássico do ensino de frações. Não estamos aqui, descartando esses modelos, que são úteis para que as crianças dêem significado à necessidade dos novos números, mas questionando a igualdade das partes tão enfatizada no ensino. Nesses casos temos que supor e não afirmar que as partes são iguais.

### Concepção de Medida

1) Qual a distância entre o ponto A e o zero?



2) Qual a distância entre os pontos A e B?



Nesta concepção a fração  $a/b$  é associada a uma unidade de medida que foi dividida em  $b$  partes de mesma medida, das quais consideramos  $a$  partes. Podemos, por exemplo, associar a fração  $a/b$  a um ponto situado sobre um segmento de reta tomado como unidade, que foi dividido em  $b$  partes congruentes (ou em um múltiplo de  $b$ ), dos quais foram consideradas  $a$  partes. Sob este ponto de vista, embora a fração não seja associada a uma região podemos considerar que se trata de um caso particular da relação parte/todo no contínuo.

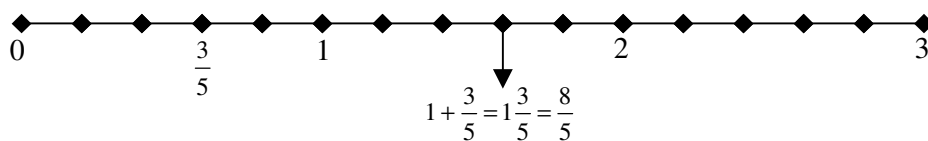
### Características

A principal característica da concepção de fração como medida, é a utilização repetida da fração  $1/b$  para determinar uma distância. Normalmente, solicita-se a medida da distância entre dois pontos usando  $1/b$  como unidade de medida e utiliza-se a representação visual de uma reta numérica ou de uma régua. Nesse caso a linha inicia-se no zero e se estende até o 1.

Assim, é necessário conhecimentos sobre escala, a presença de um zero absoluto como ponto de partida e intervalos de medidas iguais. O principal desafio será entender que a fração  $1/b$  é uma unidade de medida que deve ser usada repetidamente para determinar o comprimento e que este, no final, será representado por uma fração  $a/b$  que, por sua vez, representará  $a \times \frac{1}{b}$ , ou seja,  $a$  vezes a ocorrência da unidade  $1/b$ .

Nos casos de medida, é necessária a determinação de uma unidade de medida invariável, a especificação dos pontos de início e de final da medição a ser realizada e os números fracionários para que se concretize o ato de medir.

Tomando um segmento com mais de uma unidade:



Nas situações com esta concepção podemos obter a ocorrência da fração efetivamente como um número e perceber que  $3/5$  é um número entre 0 e 1 e ainda que  $1\frac{3}{5}$  é um número entre 1 e 2. Além disso, entender que o conjunto dos números racionais é uma extensão do conjunto dos números naturais observando que os números racionais preenchem os “vazios” entre os números naturais.

Um outro ponto importante nesta concepção, que não acontece satisfatoriamente na concepção anterior, é a ocorrência das frações maiores que a unidade, da notação dos números mistos e da soma de duas medidas de forma natural, o que favorece a percepção da equivalência no reconhecimento de que a mesma medida recebe nomes diferentes em função de novas divisões da unidade.

### **Cabe destacar que:**

Vimos na retrospectiva histórica que muitos povos sentiram a necessidade de outros números, que não os naturais, para poder representar resultados de medições, o que os levou a buscar uma unidade de medida que não exigisse a representação fracionária, no entanto diante da impossibilidade de tal tarefa cada povo desenvolver suas próprias unidades. Um consenso parcial ocorreu somente em 1792 com a criação do sistema métrico decimal que veio, principalmente, para facilitar as relações comerciais entre povos diferentes.

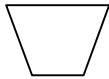
Esta concepção é necessária no ensino porque ela ajuda os alunos a darem significado e a construir o campo dos números fracionários. Mas, isto só acontecerá se eles puderem escolher unidades de medidas não padronizadas e a perceber a necessidade de sua subdivisão para poder associar um número à grandeza que está sendo medida. Em medidas de comprimento isto pode ser facilmente obtido a partir de tiras de papel consideradas como unidade. O uso de régua, neste caso, são desaconselháveis porque como as divisões já estão explícitas as crianças não percebem as subdivisões da unidade voltando a tratar as situações somente com a contagem.

## A reconstituição do inteiro

Podemos apresentar aos alunos tarefas em que as figuras representem partes e solicitar que o inteiro seja reconstituído. Uma boa compreensão de frações deve permitir que a partir do inteiro se possa identificar qualquer fração, mas também, que a partir das partes se possa reconstruir o inteiro.

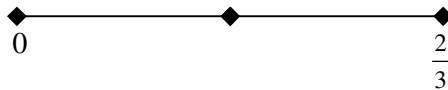
As duas concepções estudadas nos permitem elaborar atividades do tipo:

- 1) Se a figura abaixo é um terço do inteiro, desenhe o inteiro.



- 2) Se  $\frac{2}{7}$  das bolinhas de Sérgio são brancas e ele tem 12 bolinhas brancas, qual o total de bolinhas que Sérgio possui?

- 3) Se o desenho abaixo representa  $\frac{2}{3}$  da unidade qual é a unidade?



Este caminho de volta permitirá a constatação de que no caso da concepção parte/todo no contínuo podemos obter inteiros com formas diferentes como resposta, o que não acontecerá no caso discreto ou na concepção de medida, em que encontramos uma única solução. Além de desenvolver a percepção visual das figuras e seu tratamento a partir da composição, aprofunda a compreensão das concepções envolvidas.

## Concepção de Quociente

- 1) Se temos três pizzas para distribuir igualmente entre quatro crianças, quanto cada uma vai receber?
- 2) Se temos nove bolinhos para distribuir igualmente entre cinco crianças, quanto cada uma vai receber? Qual a sentença matemática que representa essa ação?
- 3) João tem 25 bolinhas de gude e quer distribuí-las entre seus três sobrinhos. Quando cada um irá receber?
- 4) Tenho três pizzas e quero dar metade de cada uma delas para cada criança. Para quantas crianças posso distribuir as pizzas.

## Características

Como vimos na retrospectiva histórica alguns povos associaram as frações diretamente à divisão de naturais e desenvolveram técnicas para obter tais resultados.

A concepção da fração como quociente, está associada diretamente ao ato de distribuição ou de divisão e a fração  $a/b$  representa que  $a$  foi distribuído ou dividido em  $b$  partes. Nesta

concepção o numerador  $a$  não representa partes do inteiro ou da unidade, mas algo que será dividido em um número  $b$  de partes, que pode ser menor, maior ou igual a  $b$ .

Enquanto nas concepções anteriores estamos quantificando e trabalhando com uma única variável: o inteiro ou a unidade de medida, aqui podemos ter duas variáveis, por exemplo pizzas e crianças, embora a concepção parte/todo apareça na distribuição solicitada. A principal característica desta situação é a representação da fração pela operação de divisão.

### **Caso discreto**

Na situação quociente, a distribuição de 12 bolinhas entre 3 meninos, por exemplo, implica na mesma quantidade de bolinhas para cada um, porque ela poderá ser representada por  $12 \div 3$ .

### **Cabe destacar que:**

Nas situações que envolvem a concepção quociente em quantidades discretas podemos ter casos, como o exemplo (3) acima, em que a distribuição em partes iguais não é possível. O tratamento solicitado aqui é o da divisão euclidiana,  $25 = 3 \times 8 + 1$ , isto é sobrar uma bolinha. Para que se possa usar a linguagem fracionária é necessário que a quantidade a ser distribuída tenha um número de objetos que seja múltiplo da quantidade de partes que se deseja. Caso contrário, como no exemplo citado, o resto da divisão será dado para alguma das crianças, segundo algum critério, pois nenhuma delas irá tentar partir a bolinha porque sabe que depois disso não teria mais uma bolinha e sim pedaços de vidro.

Normalmente, as crianças, realizam com facilidade tarefas de divisão em contextos discretos, porque estas podem ser realizadas por procedimentos diretos de contagem.

Algumas dificuldades podem surgir dependendo de a tarefa apresentada estar relacionada aos dois aspectos da divisão:

- a) partititiva – quando é dada a quantidade de inteiros e o número de partes em que se quer dividir essa quantidade e solicita-se a quantidade de cada parte;
- b) por cotas – quando é dada a quantidade de inteiros e a quantidade de cada parte e solicita-se a quantidade de partes possíveis.

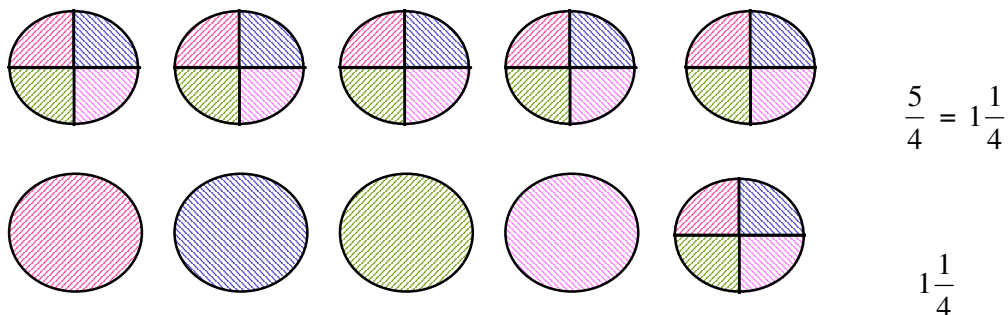
### **Caso contínuo**

Como as situações na concepção de quociente solicita uma divisão, as dificuldades na procura de partes que têm mesma área, já vista na situação parte/todo, permanecem aqui. É necessário um plano de ação com procedimentos de estimativa, de tentativa ou mesmo de operações aritméticas. As situações desta concepção se prestam satisfatoriamente à divisão de várias regiões ao mesmo tempo.

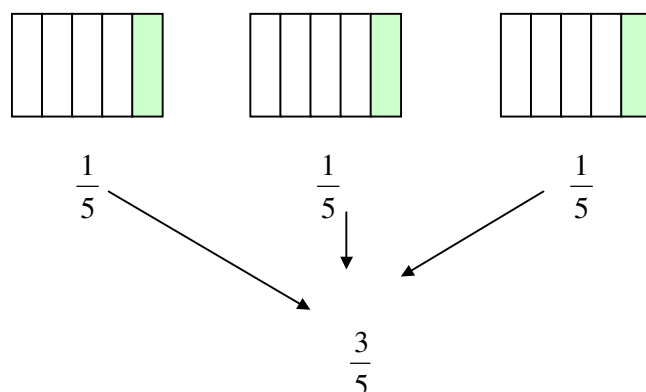
*Dividir cinco pizzas igualmente entre quatro pessoas* é um tipo de problema que pode apresentar, entre outros, dois caminhos de solução: a divisão de cada pizza em quatro, destinando para cada pessoa cinco partes ou a distribuição de uma pizza inteira para cada um e a divisão de uma das pizzas em quatro partes.

As duas soluções nos levam ao mesmo resultado, mas com representações diferentes. O código misto aparece na equivalência com a fração maior que um encontrada.





Já para *dividir três barras de chocolate igualmente entre cinco crianças* é necessária a divisão dos três chocolates. Uma das possibilidades poderia ser representada por:



Nessas duas podemos perceber que a partir da divisão satisfatória de uma pizza ou de um chocolate, o processo pode ser repetido para a divisão dos restantes.

Além disso, significados diferentes se formam a partir das ações de dividir uma unidade em cinco partes e tomar três delas ( $\frac{3}{5}$  como parte/todo ou medida) e de dividir três inteiros em cinco, embora sejam as duas representadas pelo mesmo número fracionário.

### **Cabe destacar que:**

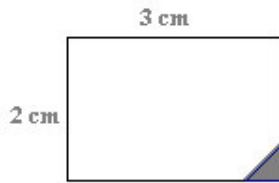
Quando utilizamos pizzas, chocolates, bolos, ... para as situações de ensino pretendemos que a partir delas as crianças dêem significado às novas quantidades encontradas. Quando dividimos uma pizza em quatro partes e associamos a cada uma a fração  $\frac{1}{4}$  estamos considerando apenas o aspecto visual da igualdade das partes pois esta só poderia ser obtida a partir do “peso” da pizza inteira e das partes o que não faz sentido algum na realidade. O mesmo acontece nas situações que envolvem chocolates pois a maioria destes já vem dividido em partes iguais da fábrica.

### **Concepção de Razão**

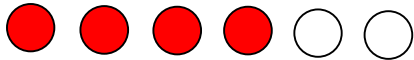
Diferente dos pontos de vista anteriores, as situações que envolvem razão não são representadas por uma partição ou medição ou distribuição, mas por alguma quantidade que é comparada com uma outra quantidade (do mesmo objeto ou de objetos diferentes), isto é, as razões podem ser usadas como um índice comparativo entre duas quantidades.

### Algumas situações

- 1) Uma receita pede 2 copos de açúcar para 3 copos de farinha. Quanto de farinha é necessário para fazer uma receita utilizando 15 copos de açúcar? Quantas receitas poderiam ser feitas?
- 2) Em um saco existem quatro bolas pretas e cinco bolas brancas. Tirando aleatoriamente uma bola qual é a probabilidade de que seja preta?
- 3) Em uma caixa existem três bolas vermelhas e duas azuis. Qual é a razão das bolas vermelhas para as bolas azuis?
- 4) Qual a fração do retângulo abaixo que está pintada?



- 5) Que fração das bolinhas é vermelha? Qual a razão das bolinhas vermelhas para o total de bolinhas?



- 6) Se um jogador de basquete acerta uma bola em cada duas que arremessa em um jogo e três em cada quatro no jogo seguinte. Qual é a sua performance nos dois jogos?
- 7) Se em uma sala de aula temos dois meninos para cada três meninas qual a porcentagem de meninos nessa classe?
- 8) Qual a velocidade em km/h de um carro que percorre 4 km em 6 minutos?

### Características

Uma das características deste ponto de vista é a predominância da idéia de par ordenado de números naturais que é descrito pela situação pela fração  $a/b$  ou por  $a : b$ . Esta razão por sua vez, determina uma proporção, visto que qualquer alteração feita em  $a$  provocará uma mudança previsível em  $b$ . Por exemplo, se identificamos em uma situação a razão  $3/4$  (ou de 3 para 4) teremos conseqüentemente as razões  $6/8$  ou  $9/12$  e assim por diante. Tal evidência nos permite definir a proporção como a igualdade entre duas razões e representa-la genericamente por  $a/b = c/d$  ou  $a : b :: c : d$ , que se lê “ $a$  está para  $b$ , assim como  $c$  está para  $d$ ”.

Além disso, a descrição inicial obtida na situação pode ser vista como uma constante que se conserva na proporcionalidade.

Sob este ponto de vista nem sempre se identifica um inteiro e nas comparações possíveis além da relação parte/todo podemos detectar relações do tipo todo/todo ou parte/parte.

O trabalho com razões encaminha os alunos à equivalência de números fracionários e para o pensamento proporcional, excelente ferramenta para a resolução de problemas.

### Cabe destacar que:

A importância da razão aparece na quantidade de situações da realidade em que aparecem:

- A razão pode transmitir uma noção de grandeza relativa quando define uma nova grandeza a partir de duas outras grandezas apresentadas. Este é o caso, por exemplo, da velocidade média que relaciona espaço e tempo. Nas situações que envolvem velocidade média podemos ter situações que exigem simplesmente a comparação entre o espaço e o tempo ou a busca de valores adicionais para uma proporção obtida (regra de três).

- As escalas nos mapas planos e miniaturas são representadas por razões que relacionam as medidas utilizadas nos mapas (ou miniatura) com as medias reais.

- As receitas culinárias e misturas de líquidos também envolvem diretamente a idéia de razão.

- A densidade demográfica também é um exemplo da utilização de razão.

- No caso da probabilidade a utilização da razão lhe dá um caráter de simples cálculo aritmético quando se compara a quantidade de casos favoráveis com a quantidade de casos possíveis.

- No caso da porcentagem, daremos este nome particularmente à relação entre um número e 100 (ou 1000). Podemos estabelecer a partir da razão relações entre o número dado e conjuntos de 100 partes. Por exemplo, um desconto de 15% em um objeto que custa 300 poderia ser entendido por:

15,00 ----- 100,00

15,00 ----- 100,00

15,00 ----- 100,00

o que leva a perceber que existe a mesma relação entre ,15 e 100, e, 45 e 300. A diferença entre o ponto de vista de razão e parte/todo já descrita neste caso é bastante sutil.

A razão entre medidas de áreas permite que se identifique uma relação parte/todo em algumas situações especiais, por exemplo, quando a parte em questão não permite o recobrimento total do inteiro considerado com partes congruentes à inicialmente dada.

## **Dificuldades**

Um dos principais problemas que a concepção de razão produz é de caráter operatório.

Enquanto algumas situações são tratadas por equivalência não se apresentam tais problemas mas a partir do momento que queremos dar a essas situações um caráter operatório nos defrontamos com um sério obstáculo.

Por exemplo, no caso da receita de bolo, quando pensamos em triplicar a receita por exemplo podemos pensar em multiplicar a quantidade de ingredientes por 3 ou somar três vezes a quantidade de uma receita. Tal interpretação pode levar o aluno a operar de forma errônea

com números fracionários e entender que  $3 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$  ou que  $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ . Outra questão que

surge com a concepção de razão é a possibilidade de representa-la pelo quociente de dois números. Existem situações em que a divisão dos dois números envolvidos aparece de forma natural. Este é o caso de dizer que um carro que percorre 300 km em 5 horas percorreu essa distância a uma velocidade média de 60 km/h. O mesmo não acontece no caso da receita de bolo, pois não faz sentido dizermos que usamos aproximadamente 0,67 açúcar/farinha.

Existe uma crença de que razão é divisão, e em alguns casos isso é verdade e tem significado, mas em outros casos isso não se aplica.

## Concepção de Operador

- 1) Se  $\frac{2}{3}$  de 12 é 8, por quanto tenho que multiplicar o 8 para obter 12?
- 2) Se minha receita de bolo pede 3 copos de leite mas eu só tenho 2, quanto devo tomar dos outros ingredientes para fazer o bolo usando esses 2 copos de leite?
- 3) Dado um retângulo com medidas 4 e 6 centímetros obter um novo retângulo que tenha as medidas dos lados iguais a  $\frac{3}{4}$  das medidas originais.

### Características

Na concepção de operador a fração assume o papel de transformar uma situação inicial para produzir uma situação final adquirindo um caráter funcional de transformação.

Esse caráter funcional da fração nesta interpretação pode nos levar a entendê-lo como uma máquina de transformação. No terceiro exemplo acima, a fração  $\frac{3}{4}$  atua sobre as medidas dos lados do retângulo assumindo o papel de transformar as medidas iniciais dos lados do retângulo nas medidas dos lados do novo retângulo. É como se tivéssemos uma máquina que transforma o que entra em seus  $\frac{3}{4}$ .

Podemos perceber que a fração é considerada como um número e não como um par de números, tendo o papel de elementos da álgebra das transformações apresentando um contexto natural para a idéia algébrica de composição de transformações. Pode surgir a idéia de inverso a partir do operador que reconstrói o estado inicial e também a idéia de identidade a partir do operador que não modifica o estado inicial.

As situações de fração como operador podem envolver:

- um operador que produz situações finais diferentes dependendo da situação inicial;
- operadores diferentes que produzem a mesma situação final (operadores equivalentes);
- operadores que voltam a situação inicial (operador inverso);
- o operador que não altera a situação inicial (operador idêntico).

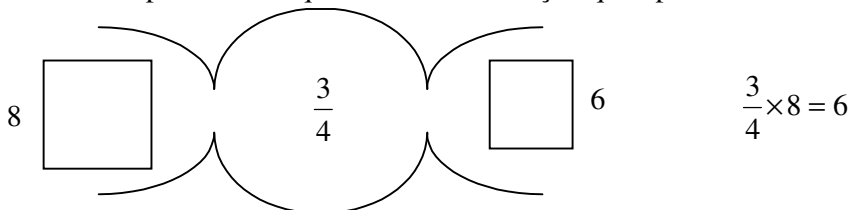
Nestas situações podemos associar a operação de multiplicação, tanto de um inteiro por uma fração, quanto de frações, traduzindo por exemplo, o dobro de  $\frac{1}{5}$  por  $2 \times \frac{1}{5}$  ou ainda, a

metade de dois terços por  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  que é chamada de **fração de fração**, neste caso temos a ação da fração  $\frac{1}{2}$  sobre a fração  $\frac{2}{3}$  produzindo o estado final de  $\frac{2}{6}$ .

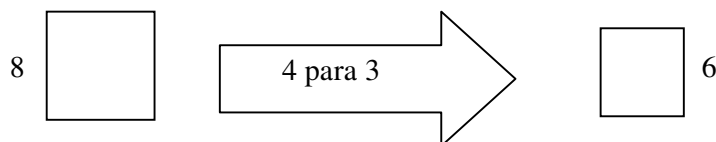
### Caso contínuo

No caso contínuo a fração  $\frac{a}{b}$  pode ser considerada um operador que reduz as medidas de uma figura (comprimento ou área) se  $a < b$  e a amplia nos casos em que  $a > b$ . Nestas situações temos que superar um obstáculo. No exemplo dado acima podemos observar que a razão que reduz as medidas da figura inicial é “de 4 para 3” enquanto que o operador que transforma a figura é  $\frac{3}{4}$  também chamado de razão de semelhança.

Associando a esse exemplo uma máquina de transformação que operara com  $\frac{3}{4}$ , temos:



Utilizando razão temos:



Com as duas maneiras de proceder obteremos como situação final, um quadrado com 6 cm de lado, entendendo que para 4 cm que entra na máquina saem 3 cm. Fica implícito nessa ação que primeiro atua a operação de divisão ( $8 : 4 = 2$ ) e depois a de multiplicação ( $2 \times 3 = 6$ ) que serão representadas por  $\frac{3}{4} \times 8 = 6$ , porque queremos encontrar  $\frac{3}{4}$  de 8 cm”. Com a razão entendemos que para cada 4 cm da figura inicial consideramos 3 cm na nova figura. Assim, com o devido cuidado podemos, a partir das concepções de operador e razão desenvolver as noções de ampliação e redução de figuras, por exemplo.

### Caso discreto

Nas quantidades discretas a fração  $a/b$  produz sobre a quantidade de elementos de um conjunto um efeito que resulta em  $a/b$  vezes a quantidade de elementos do conjunto inicial,  $\frac{3}{4}$  de 16 bolinhas é um conjunto com  $\frac{3}{4} \times 16$  bolinhas, que resulta em 12 bolinhas. Se pensarmos na razão entre o número de bolinhas do conjunto de partida para o número de bolinhas do conjunto de chegada temos que de 4 bolinhas do conjunto inicial foram tomadas 3. Mas, só podemos ter uma fração operando sobre o número de elementos de um conjunto se esse número for múltiplo de  $b$ .

As porcentagens podem ter a característica de operador se interpretarmos, por exemplo, 60% de 35 como a fração  $60/100$  atuando sobre 35 e representarmos por  $\frac{60}{100} \times 35$  fazendo 100 partes de 35 e tomando 60.

A fração que atua como operador descreve um estado a partir da situação dada e uma ordem a partir da ação que será realizada estabelecendo duas formas de equivalência:

a) de operadores diferentes que atuam sobre o mesmo estado inicial produzindo o mesmo estado final.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times \frac{2}{3}$	8
12	$\times \frac{4}{6}$	8
12	$\times \frac{8}{12}$	8

Esta infinidade de operadores serão chamados de equivalentes porque provocam o mesmo efeito no objeto em que são aplicados e permitem estabelecer a relação  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \dots$

b) de estados: quando o mesmo operador atua sobre estados iniciais diferentes e produz a mesma transformação.

Estado inicial	Operador	Estado final
12	$\times \frac{2}{3}$	8
24	$\times \frac{2}{3}$	16
54	$\times \frac{2}{3}$	36

Aqui teremos a equivalência na comparação do estado inicial e do estado final o que permite estabelecer a relação  $\frac{12}{8} = \frac{24}{16} = \frac{54}{36} = \dots$