MÚLTIPLOS SIGNIFICADOS PARA AS FUNÇÔES

1. Desenvolvimento histórico

A noção de função surgiu como o instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenômenos naturais, iniciado por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). O estudo da natureza pedia uma linguagem matemática apropriada. O estudo do movimento da queda dos corpos, do movimento dos planetas e dos movimentos curvilíneos impulsionou o desenvolvimento do conhecimento matemático relativo às funções. A noção de função está associada na sua origem à noção de lei natural.

Assim, o conceito de função, historicamente, tem significado de modelo para um fenômeno real, uma relação especial entre as grandezas variáveis que constituem um acontecimento natural ou das ciências experimentais.

No século XVII, Descartes utilizou equações com x e y para introduzir uma relação de dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo de valores de uma delas a partir dos valores da outra. Na mesma época, Newton usava o termo " fluente" para expressar sua noção de função, muito ligado com a noção de curva. No fim do século, Leibniz usa o termo "função" para referir segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas e curvas. Logo depois o termo foi usado para referir quantidades dependentes entre si.

Nos séculos XVIII e XIX a noção de função passou a ser identificada com a de expressão analítica. Em 1716, João Bernouilli define *"função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma por variáveis e constantes"*. Em 1748, Euler, substitui o termo *quantidade* por *expressão analítica*. Constitui-se, na época, a identificação entre função e suas representações, como se uma função fosse uma equação.

Também ocorre uma proliferação nos significado dados à "variável" , juntamente com o significado dado à função. O termo "variável", que inicialmente referia grandezas físicas que variavam e eram interdependentes, passa a ser associado à medidas de uma curva, com significado geométrico. Logo depois, assume o significado de um mero símbolo de linguagem: x, ou y, por exemplo. Nesta linha, função pode ser vista como lei natural, como relação entre medidas de uma curva ou como uma equação, uma expressão em linguagem matemática.

Em 1837, Dirichlet separou o conceito de função da sua representação analítica, formulando-os em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos. *Uma função é uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo valor da variável independente se associa um só valor da variável dependente.* O termo "variável", no entanto, nada tem a ver com grandezas físicas, é apenas um símbolo.

No século XX, com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos iniciada por Cantor, a noção de função passa a referir correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não. O grupo Bourbaki elaborou em 1939 a definição hoje utilizada nos meios matemáticos, para função: *Uma função é uma tripla ordenada (X, Y, f), onde X e Y são conjuntos e f é um subconjunto de XxY, tal que se* $(x,y) \in f$ *e* $(x, y') \in f$ *então* $y = y'$.

Pode-se explicar esta multiplicação de sentidos atribuídos para a noção de função, recorrendo às reflexões sobre os modos matemáticos e os modos científicos de construção do mundo, tanto no contexto antropológico, quanto no contexto cognitivo. Existem suposições predominantes a respeito da Matemática:

1- O crescimento do conhecimento matemático é cumulativo

2 - A verdade matemática é a-histórica

3- A história da matemática parece ser de harmonia e de progresso contínuo

4- Parece que cada novo teorema é acrescentado ao edifício da Matemática, sem necessidade de reconceptualizar os teoremas antigos

Na realidade, os estudiosos da História demonstram que a matemática é a área da atividade humana na qual ocorrem as revoluções mais fundamentais. No desenvolvimento científico, uma nova teoria pode significar a eliminação de outras. Na Matemática parece que não é preciso escolher entre duas: por exemplo, coexistem definições diferentes para "função", produzidas em épocas diferentes, que atribuem significados diferentes a essa noção, e que são apresentadas como se tivesse ocorrido uma evolução conceptual. Uma nova conceptualizacão de função foi negociada e institucionalizada pela comunidade matemática, deixando-se de identificar variável com grandezas físicas. A definição que utiliza noções da Teoria dos Conjuntos exclui até mesmo a noção de variável, que estava na origem histórica do conceito. A matemática soluciona as questões das limitações das definições dando uma nova interpretação aos conceitos.

2. Ensino/aprendizagem da noção de função

Uma função pode ser pensada como:

1) uma relação especial entre as variáveis que constituem um fenômeno;
2) uma relação especial entre os elementos de conjuntos numéricos;
3) uma transformação especial de um conjunto de pontos em outro ou de uma figura geométrica em outra.

Atividades para o ensino/aprendizagem de função devem ter em mente estes significados e contemplá-los, numa seleção conveniente de problemas.

Esta seleção precisa oferecer oportunidades para os estudantes:

a) analisar situações de diferentes tipos, identificando as variáveis, os conjuntos ou as figuras envolvidas;
b) estabelecer relações entre elas;
c) verificar se estas relações são ou não "especiais".

No mundo das aplicações ao cotidiano e às outras ciências, "função" é uma relação tal que a cada valor da variável independente associa um único valor da variável dependente.

No mundo dos conjuntos, "função" é uma relação que, a cada elemento do conjunto de partida (Domínio), associa um único elemento no conjunto de chegada (Contradomínio).

No mundo da Geometria, quando o Domínio e o Contradomínio são figuras geométricas A e B, uma função é uma transformação de A em B que, a cada ponto de A, associa um único ponto de B.

Em todos os casos, função pode ser descrita como uma relação unívoca. Esta relação pode ser entre grandezas variáveis, entre conjuntos numéricos ou entre figuras geométricas.

3. Problemas propostos no mundo nas aplicações

Os problemas seguintes foram selecionados com o objetivo de explorar o conceito de função como relação unívoca entre grandezas variáveis que constituem situações concretas ou da natureza, ou do cotidiano ou das outras ciências. Espera-se também introduzir as diversas formas de representação de uma dada relação, deixando emergir tabelas, diagramas, gráficos ou equações, sempre que possível.

Os problemas foram formulados de modo a deixar surgir, nos estudantes, a idéia de que as respostas a problemas de matemática podem não ser únicas e que existem problemas que não têm respostas. Uma dada situação pode ser pensada de diferentes modos e uma mesma função pode ser representada de maneiras diversas ou pode não ter representação alguma.

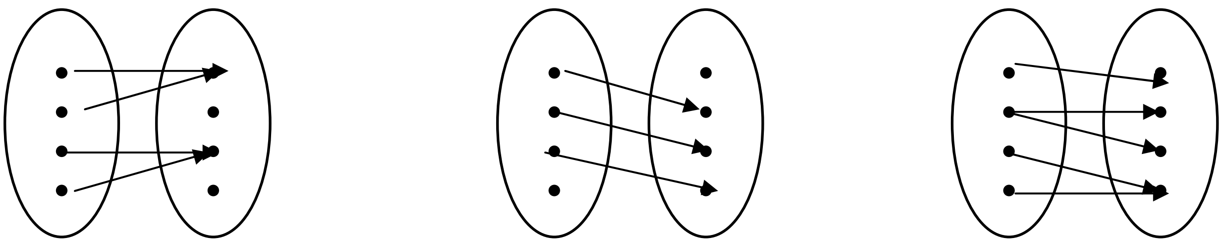
1. Um carro se move, numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso. Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação. Esta relação é uma função?
2. Um estudante elabora tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos com seus perímetros. Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação. Esta relação é uma função?
3. Uma seção eleitoral seção mantém à disposição a lista de candidatos e a lista de eleitores. Ao final da votação, constatou-se que ninguém votou nulo ou em branco. A Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação Esta relação é uma função?
4. Um cientista elabora tabela para representar o crescimento de uma certa população de animais, sob observação. Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação Esta relação é uma função?
5. Pegue uma folha de caderno e faça dobraduras sucessivas, sempre dobrando pela metade o retângulo resultante da dobradura. Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação Esta relação é uma função?
6. Um grupo de estudantes realiza um experimento de física, medindo com um termômetro muito sensível, num mesmo instante, a temperatura de diversos pontos de uma mesma sala. Os pontos estão em altura diferentes e em diferentes distâncias, com relação às paredes. Identifique e defina variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação Esta relação é uma função?
7. Um meteorologista tem registros dos valores médios de temperatura e pressão, para cada dia do ano, dos últimos 10 anos, da cidade de Porto Alegre. Identifique e defina

variáveis envolvidas nesta situação, defina uma relação entre elas. Represente de alguma forma esta relação Esta relação é uma função?

3. Problemas propostos no mundo dos conjuntos numéricos

A seguinte seleção de problemas visa favorecer o desenvolvimento da noção de “função” como relação unívoca entre os elementos de dois conjuntos numéricos. Nesta linha, vamos enfocar o problema das funções definidas com Domínio e Contradomínio infinitos discretos e contínuos, eis que, usualmente os problemas se mantêm no nível dos conjuntos finitos e discretos.

1.



A B C D E F

Considerando os pares de conjuntos acima e as relações entre eles expressas por diagramas de setas, identifique as funções. Em cada caso identifique Domínio, Contradomínio e Imagem.

2. a)Existe uma função cujo Domínio é {1,2} e a Imagem é {1,2,3}?

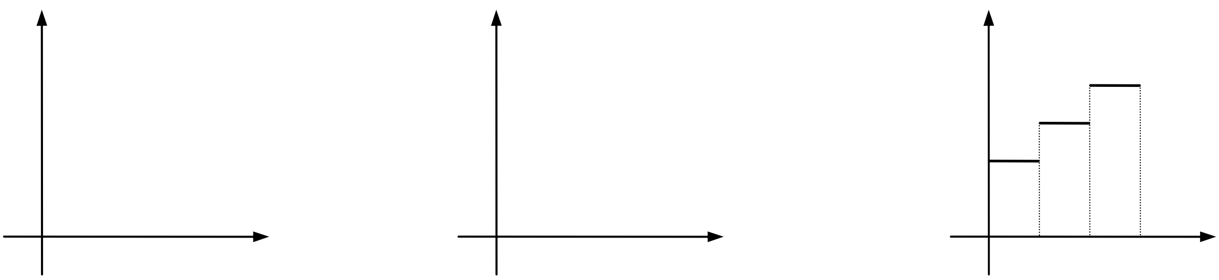
b) Existe uma função cujo Domínio é N e a Imagem é Z?

c) Existe uma função cujo Domínio é N e a imagem o conjunto dos números pares?

d) Existe uma função cujo Domínio é [1,2] e a imagem é [1,3]?

e) Existe uma função cujo Domínio é (0,1) e a Imagem é R ?

3.



Define-se um gráfico como uma forma de relacionar o domínio e o contradomínio de uma relação. O gráfico contém os pares de pontos (x,y), tal que y está relacionado com x. Analise os gráficos acima. Verifique se a relação expressa por cada um deles é uma função. Identifique Domínio e Imagem.

4. A relação f: R $\to$ R

$$x \to \begin{cases} -3x^2 + 3, & x \geq 0 \\ 5, & x \langle 0 \end{cases}$$

associa a cada número real x um outro número real y, tal que y = f(x). Esta relação é uma função? Em caso positivo, identifique Domínio e Imagem e trace um gráfico.

5. A relação f: R $\to$ R

x $\to$ 0 se x é racional

1 se x é irracional

associa a cada número real x um outro número real y, tal que y = f(x). Esta relação é uma função? Em caso positivo, identifique Domínio e Imagem. Se possível trace um gráfico.

.

3. Problemas propostos no mundo da Geometria

Esta seleção de problemas foi feita para propiciar o desenvolvimento da noção de função como transformação de figuras geométricas, significado este que vem sendo relegado ao segundo plano, tanto nível médio quanto no nível superior. Ao mesmo tempo, enfatizamos as representações de uma função cujo Domínio e Imagem têm mais do que uma dimensão.

1. Um estudante mostra, na tela de um computador, como movimentar uma figura geométrica, sem alterá-la. No mundo da Geometria, estamos tratando de uma função. Como age esta função? Quais são os conjuntos de partida e de chegada.

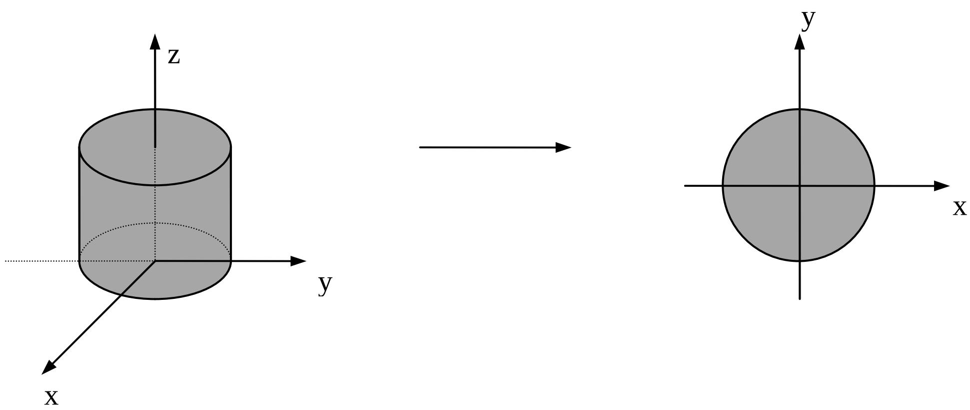
2. Um estudante multiplica, na tela do computador, uma pequena figura, formando um mosaico.No mundo da Geometria, estamos tratando de uma função. Como age esta função? Quais são os conjuntos de partida e de chegada.

3. Represente uma função que transforma um segmento de comprimento 1 em outro de comprimento

4. Represente uma função que transforme uma reta numa semi-reta.

5. Represente uma função que transforme um quadrado de lado 1 num quadrado de lado 2.

6. Considere as figuras abaixo como dois conjuntos de pontos A e B. A seta indica que existe uma relação, uma certa forma de associação, entre os pontos de A e os pontos de B. Esta relação é uma função? Se possível expresse esta relação por uma equação.



BIBLIOGRAFIA SUGERIDA

CARAÇA, Bento de Jesus Caraça. Conceitos fundamentais da Matemática. Lisboa: Tipografia Matemática, 1958, 318 p.

EVES, Howard. Introdução à história da Matemática. Campinas: UNICAMP, 1997, 843 p. Tradução de Hygino Domingues

PONTE, P. O conceito de função no currículo de Matemática. *Educação e Matemática,* Lisboa, n. 15, 1990, p.3-9.

SILVA, Circe M. Silva da. *O Conceito de Variável e Função*. 1992, 12 p. (fotocópia).

ZUFFI, Edna. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. *Educação Matemática em Revista,* ano 8, n 9/10, abril, 2001, p. 10-16.

QUADRO RESUMO DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DA NOÇÃO DE "FUNÇÃO"

Século	Autor	Frases Geradoras
XVI	Galileu-Galilei (1564-1642) Termo "função" não é usado. Noção corresponde à de Lei natural: Lei quantitativa que expressa regularidades de um fenômeno natural; relações entre a variação de quantidades observáveis.	**(Função) é relação entre variáveis.** **Variáveis são quantidades observáveis na natureza.**
XVII	Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727) – relação entre medidas associadas a uma curva, como por exemplo , as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio de curvatura. Leibniz (1670) introduz o termo função	**Função é uma correspondência entre quantidades associadas a uma curva da Geometria** **Variáveis são quantidades que assumem diferentes valores, na construção de uma curva.**
XVIII	João Bernouilli (1667-1748) : função é expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; Euler (1707-1783): função é uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes.	**Função é uma equação, uma fórmula.** **Variável é um símbolo, um elemento de linguagem.**
XIX	Dirichlet (1805-1859): uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é função unívoca de x. A variável x, `a qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada variável dependente.	**Função é uma correspondência entre variáveis** **Variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números**
XX	Grupo Bourbaki (1939): função f é um conjunto de pares ordenados de elementos, sujeitos à condição seguinte: se (a,b) e (a,c) são elementos de f então b=c.	**Função é um conjunto de pares ordenados** **Omite-se variável.**